



# Etude du comportement du grès rouge de Wildmoor. Application à l'analyse de stabilité d'un forage pétrolier en cours de creusement et de production

Ahmed Oulahna

## ► To cite this version:

Ahmed Oulahna. Etude du comportement du grès rouge de Wildmoor. Application à l'analyse de stabilité d'un forage pétrolier en cours de creusement et de production. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996. Français. NNT : . tel-00523152

**HAL Id: tel-00523152**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00523152>**

Submitted on 4 Oct 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

X

# THESE DE DOCTORAT

**Spécialité : Géotechnique**

*présentée par*

**Ahmed OULAHNA**

*pour obtenir le titre de*

**Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées**

**ETUDE DU COMPORTEMENT DU GRES ROUGE DE  
WILDMOOR. APPLICATION A L'ANALYSE DE STABILITE  
D'UN FORAGE PETROLIER EN COURS DE CREUSEMENT  
ET DE PRODUCTION.**

*Centre d'Enseignement et de Recherche en mécanique des sols  
(C.E.R.M.E.S/ENPC-LCPC)*

*Soutenue le 18 novembre 1996 devant le jury composé de Messieurs*

**Président:**

**M. Jacques DESRUES**

**Rapporteurs:**

**M. Pierre-Yves HICHER  
M. Yves LEROY**

**Examineurs:**

**M. Alain EHRLACHER  
M. Johan TRONVOLL**

**Directeur de thèse:**

**M. Jean SULEM**

ENP.C.



INV04462



**à ma Mère**  
**mon Père**  
**mes frères et soeurs**  
**ma fiancée**





## Remerciements

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Jean SULEM pour avoir dirigé ce travail et pour les précieux conseils qu'il m'a donnés tout au long de cette étude ainsi que pour sa disponibilité.

Je remercie Monsieur Roger FRANK, Directeur du CERMES, qui m'a accueilli au sein de son laboratoire.

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Pierre-Yves HICHER, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes et à Monsieur Yves LEROY, chargé de recherche au LMS à l'Ecole Polytechnique de Paris, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de ce travail.

Je voudrais, par la même occasion, remercier Monsieur Jacques DESRUES, directeur de recherche au laboratoire 3S/IMG de Grenoble, Monsieur Alain EHRLACHER, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, et Monsieur Johan TRONVOLL, chef de projet à IKU Norvège, qui ont accepté d'examiner cette thèse.

Un grand merci également à tous mes collègues du CERMES pour leur cordialité et l'ambiance de travail très conviviale qu'ils ont su créer.

Enfin je remercie tout spécialement ma famille et tous mes amis pour leur aide et leurs encouragements.



## Résumé

Ce mémoire porte sur l'étude du comportement et de la rupture d'une roche (grès rouge de Wildmoor) de réservoir lors de l'exécution et de la mise en production d'un forage pétrolier. Divers chemins de sollicitations, en conditions axisymétriques (essais de compression uniaxiale et triaxiale et essais d'extension), ont permis de caractériser le comportement mécanique de la roche. Les essais avec cycles de charge-décharge ont permis de quantifier l'endommagement du matériau. La loi de comportement développée tient compte de la dépendance en contraintes des paramètres élastiques du matériau et de l'endommagement. Le comportement plastique de la roche est décrit par un critère de Mohr-Coulomb non-linéaire tenant compte de la dépendance en pression des paramètres plastiques (coefficients de frottement et de dilatance) de la roche. Il comporte une phase d'écrouissage isotrope en frottement suivi d'une phase de radoucissement cinématique de la cohésion. Ce modèle de comportement est appliqué à l'étude de la localisation des déformations dans le cadre d'une théorie de plasticité non-coaxiale. L'application à l'étude de stabilité d'un forage pétrolier a comporté le développement d'un programme de calcul du champ de contraintes autour d'un puits en cours de creusement et de production. L'étude des conditions d'apparition de différents modes d'instabilités (formation de bandes de cisaillement et instabilité de surface) a mis en évidence l'influence de la dilatance de la roche, de la profondeur du forage et du gradient de pression lors de la mise en production du puits.

## Mots clés

Grès, Elasticité non-linéaire, Endommagement, Plasticité, Ecrouissage isotrope, Dilatance, Bifurcation, Localisation de la déformation, Bandes de cisaillement, Non-coaxialité, Anisotropie, Déformation plane, Forage profond, Instabilité.



## **Abstract**

This study concerns the mechanical behaviour and the failure conditions of a reservoir rock (red Wildmoor sandstone). Several stress paths, in axisymmetric conditions (uniaxial and triaxial compression tests, extension tests), have allowed to characterize the constitutive behaviour of the rock. The material damage is quantified through triaxial compression tests with loading and unloading cycles. The constitutive law developed takes into account the stress and damage dependency of the elastic parameters. The plastic behaviour of the rock is described by a non-linear Mohr-Coulomb criteria which takes into account the pressure dependency of the plastic parameters (friction and dilatancy coefficients). It involves an isotropic friction hardening phase and a kinematic cohesion softening one. This constitutive model is extended to non-coaxial plasticity theory for appropriate prediction of strain localization. Borehole stability during the drilling phase and the production phase is studied. This involves the developpement of a code to compute the stress field around the borehole during drilling and oil production. The study of the occurrence of various instability modes (shear band formation, surface instability) has shown prominently the influence of the dilatancy of the rock, the depth of the borehole and the pressure gradient applied at the borehole wall during production.

## **Keywords**

Sandstone, Non-linear elasticity, Damage, Plasticity, Isotropic hardening, Dilatancy, Bifurcation, Strain localization, Shear band, Non-coaxiality, Anisotropy, Plane strain, Deep borehole, Instability.



# LISTE DES SYMBOLES

## Cinématique

$v^p$  déformations volumiques plastiques

$g^p$  intensité du déviateur des déformations plastiques

$(\Delta \varepsilon_{ij})$  variation du tenseur des déformations

$(\Delta \omega_{ij})$  variation du tenseur des rotations

$(e_{ij})$  partie déviatorique du tenseur des déformations

$I_{1\varepsilon-p}$  premier invariant de la vitesse de déformation plastique

$J_{2\varepsilon-p}$  second invariant déviatorique de la vitesse de déformation plastique

## Statique

$I_1 \sigma$  premier invariant du tenseur des contraintes

$J_{2s}$  second invariant déviatorique du tenseur des contraintes

$J_{3s}$  troisième invariant déviatorique du tenseur des contraintes

$p = I_1 \sigma / 3$  pression moyenne

$T = \sqrt{J_{2s}}$  intensité du déviatorique

$\sigma_e = \sqrt{3(1 - 2\nu)p^2 + 2(1 + \nu)T^2}$  contrainte équivalente

$\alpha_s$  angle d'orientation du vecteur contrainte déviatorique dans le plan déviatorique

$\phi_\sigma$  inclinaison des contraintes  $\tan \phi_\sigma = T/(q-p)$

$(\sigma_{ij})$  tenseur des contraintes de cauchy

$(s_{ij})$  partie déviatorique du tenseur des contraintes

$D_1$  endommagement axial

$D_2$  endommagement radial

## Fonctions constitutives

$E_s$  module d'Young sécant

$\nu_s$  coefficient de poisson sécant

$G_s$  module élastique de cisaillement sécant

$K_s$  module élastique de compression sécant

$F$  critère de plasticité

$Q$  potentiel plastique



$\Psi$  paramètre de durcissement  
 $H$  module de plasticité  
 $H_t$  module d'écrouissage  
 $f$  coefficient de frottement mobilisé  
 $\mu$  fonction de frottement mobilisée  
 $c$  cohésion mobilisée  
 $q=cf$  tension limite  
 $\phi_m$  angle de frottement mobilisé  
 $d$  coefficient de dilatance mobilisé  
 $\beta$  fonction de dilatance mobilisée  
 $\Psi_m$  angle de dilatance mobilisé  
 $\theta_B$  angle d'orientation des bandes de cisaillement  
 $(C_{ijkl}^e)$  tenseur de raideur élastique isotrope  
 $(C_{ijkl}^p)$  tenseur de raideur plastique

### Conventions de signes

Pour les développements et calculs analytiques les compressions sont prises négatives ( $p < 0$ ), par contre pour les représentations graphiques les contraintes sont positives comme on a l'habitude de les représenter en mécanique des sols et des roches.

# Introduction

L'étude du comportement et de la rupture d'une roche de réservoir pétrolier sablo-gréseux, lors de l'exécution d'un forage et lors de sa mise en production, est particulièrement importante car cette mise en production peut s'accompagner d'une perte de cohésion du grès due au gradient de pression du fluide (pétrole). Ces phénomènes de venues de sables peuvent être un obstacle majeur au bon rendement des puits.

Parmi les modèles utilisés pour étudier le comportement des roches, la théorie de l'écoulement élastoplastique qui décrit le développement des déformations irréversibles couplée à l'endommagement qui décrit la dégradation des propriétés mécaniques du matériau, fournissent un cadre d'étude approprié pour la description du processus de dégradation d'un matériau tel que le grès.

L'étude de la localisation de la déformation en mécanique des roches s'inscrit dans le cadre de la théorie de la bifurcation. Basée sur la notion d'équilibre instable, la théorie de la bifurcation parvient à situer la transition du mode de déformation diffus (figure 1.7) au mode localisé en bandes de cisaillement. Cette transition, supposée se produire dans ce contexte de manière spontanée et irréversible, est décrite par le point de bifurcation. Dans un puits de forage l'application de la théorie des bifurcations permet de prédire les conditions et le mode de rupture et de poursuivre l'analyse au-delà de l'initiation de la rupture lorsque le mode de déformation du puits change complètement de nature. Cela permet de répondre à la question de la stabilisation de la zone en rupture ou au contraire de la ruine totale du puits de forage.

Dans le cadre de l'étude de stabilité des forages pétroliers, il est particulièrement important de s'intéresser au couplage hydromécanique dans les phénomènes de bifurcation pour un milieu

rocheux saturé d'un fluide. En particulier dans les réservoirs pétroliers sablo-gréseux, le phénomène de venues de sable peut être abordé dans le cadre d'une analyse de stabilité d'un milieu poreux saturé.

Notre thème de recherche consiste à déterminer une loi de comportement pour un grès faible (grès rouge de Wildmoor) tenant compte des propriétés élastiques non linéaires (dépendance des modules d'élasticité en fonction des contraintes et endommagement) et des propriétés plastiques (écrouissage en frottement et radoucissement en cohésion) de ce matériau. Le modèle constitutif est étalonné et validé à partir d'un programme d'essais axisymétriques de compression et d'extension triaxiales effectués par IKU (Institut de recherche pétrolière Norvégien), et ensuite appliqué à l'étude des phénomènes de bifurcation en mode localisé et diffus ainsi qu'à celle de la stabilité des puits de pétrole en cours de creusement et de production. La stabilité des forages pétroliers profonds est étudiée dans le cadre d'une approche par la théorie des bifurcations, qui permet de modéliser les changements de modes de déformations de la structure considérée au voisinage de la rupture.

Ce mémoire comporte cinq chapitres, le premier est consacré à une étude bibliographique qui présente les différentes lois de comportement appliquées aux roches granulaires saturées ou non ainsi qu'une analyse des mécanismes de déformations par microfissuration et l'implication de cette dernière dans la rupture en mode localisé ou diffus dans les roches granulaires. L'analyse de stabilité des forages pétroliers est également abordée dans ce chapitre.

La modélisation du comportement du grès de Wildmoor est abordée dans le second chapitre, le caractère frottant et cohésif des roches granulaires est modélisé dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité. La dépendance en pression des paramètres élastoplastiques du grès de Wildmoor est prise en compte. La dégradation du matériau sous sollicitation mécanique croissante est mise en évidence, l'évolution de cet endommagement progressif est quantifié à l'aide d'essais comprenant des cycles de charge-décharge. En conséquence un modèle de comportement élastique non-linéaire (dépendance des modules élastiques par rapport aux contraintes) avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire (dépendance des fonctions de frottement et de dilatance par rapport à la pression), est pris en compte et baptisé "modèle complet".

Dans le troisième chapitre, nous effectuons une caractérisation complète du comportement mécanique du grès de Wildmoor (détermination des paramètres élastoplastiques de la roche) à

partir d'essais triaxiaux et uniaxiaux cycliques en compression et extension. On propose également une simplification du modèle (élasticité linéaire et critère de plasticité linéaire) applicable dans une certaine gamme de contraintes. Les deux modèles complet et simplifié développés dans le second chapitre sont étalonnés sur les données expérimentales puis jugés quant à leur capacité à simuler correctement les courbes expérimentales d'efforts-déformations.

L'étude des phénomènes de bifurcation dans le grès rouge de Wildmoor est abordée dans le quatrième chapitre. Les deux modes de bifurcation localisée (formation de bandes de cisaillement) et diffuse (mise en tonneau ou flambement) seront caractérisés à partir d'essais de compression triaxiale et uniaxiale. Les résultats obtenus (inclinaison des bandes de cisaillement et point de bifurcation) à partir du modèle complet non-coaxial anisotrope seront comparés avec ceux obtenus à partir du modèle simplifié (élastoplastique) non-coaxial anisotrope et pour finir avec les résultats expérimentaux.

Dans le chapitre cinq les modèles de comportement simplifié et complet sont présentés en déformation plane dans le but d'une analyse de stabilité d'un forage pétrolier en cours de creusement et de production. Pour tenir compte du couplage roche-fluide nous présentons une théorie des milieux continus granulaires biphasiques. Par la suite nous analysons l'influence des modèles de comportement sur le champ de contraintes au voisinage du puits, mais également sur la stabilité du forage (bifurcation en instabilité de surface ou de volume). Nous nous sommes également intéressés à l'influence du gradient de pression du fluide (lors de la mise en production du forage), de la dilatance de la roche et de la profondeur du puits sur les phénomènes d'instabilité de surface et de volume.



# Chapitre I

## Synthèse bibliographique

### I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une synthèse bibliographique sur la modélisation du comportement des roches granulaires saturées ou non, et sur les phénomènes de bifurcation se produisant dans ces roches (bifurcation diffuse et localisée en bandes de cisaillement). Les résultats des analyses de bifurcation et de stabilité dépendent essentiellement des lois de comportement considérées. C'est pourquoi de nombreux auteurs se sont intéressés à la mécanique des roches et au développement de lois constitutives pour celles-ci dans le but entre autre d'étudier et d'analyser la stabilité des forages pétroliers. La troisième partie de notre synthèse bibliographique est donc consacrée à l'influence des lois de comportement des roches sur les contraintes agissant au bord des forages et sur les conditions de bifurcation et de stabilité des forages.

### I.2 Modélisation du comportement des roches granulaires

#### I.2.1 Elasticité, hyperélasticité

En mécanique des roches, comme le soulignent Nguyen Minh et Schmitt [1988], on a l'habitude, pour simplifier, d'assimiler la phase du comportement précédent la rupture à de l'élasticité linéaire. Mais il est bien connu que le serrage des pores dans le matériau peut conférer aux courbes de réponse un caractère non linéaire plus ou moins accentué. Le

comportement élastique non-linéaire peut avoir plusieurs origines et apparaître dans différentes situations. La figure 1.1a et 1.1b nous montrent deux exemples de matériaux, l'un ayant un comportement élastique linéaire, l'autre un comportement élastique non-linéaire. Comme on le voit sur la figure 1.1b, dans le cas d'un comportement élastique non-linéaire, le module d'élasticité ne peut être défini d'une manière unique, ainsi celui se rapportant au point P sur la courbe peut être identifié comme la pente de la droite OP (module sécant) ou la pente de la tangente PT (module tangent).

L'analyse des courbes contraintes-déformations à différentes pressions de confinement, d'après Goodman [1989], montrent que le module d'élasticité ne peut être choisi constant, car sa valeur dépend du chemin de contraintes suivi et de la pression de confinement appliquée à l'échantillon. Mécaniquement, ce phénomène est dû au processus de serrage et de fermetures des pores de la roche. Ainsi, dans un essai de compression triaxiale, ce n'est qu'à partir d'une pression de fermeture des pores suffisante qu'on obtient une réponse linéaire, comme on le voit sur la figure 1.2. Cela se retrouve également dans les essais triaxiaux classiques de compression. On constate que les courbes efforts-déformations présentent une concavité tournée vers le haut, ainsi qu'un raidissement du module de déformation moyen avec l'augmentation du confinement. Par contre, le fait que la concavité des courbes soit vers le bas au voisinage de la rupture doit plutôt être attribué à des irréversibilités de type "endommagement" ou "plasticité". Il apparaît, d'après Nguyen Minh et Schmitt [1988], que pour des roches avec une élasticité non-linéaire marquée, il est nécessaire de prévoir un ensemble de procédures expérimentales adaptées, pour identifier la loi de variation du module d'Young. L'essentiel du phénomène de serrage des roches, peut être attribué à l'effet de la contrainte moyenne, tout en n'excluant pas l'influence du déviateur des contraintes.

Loret [1985] a proposé une classification claire des différents modèles en s'intéressant plus particulièrement à l'influence de la dépendance en contraintes du module élastique sur la réversibilité des déformations et de l'énergie produite lors d'un cycle de charge-décharge (figure 1.1c). Ainsi que le mentionne Loret [1985], l'existence d'un potentiel à partir duquel la déformation est obtenue et identifiée à l'énergie complémentaire comme c'est le cas pour un matériau hyperélastique, garantit l'absence de production ou de dissipation d'énergie lors de cycles de charge-décharge dans le domaine élastique.

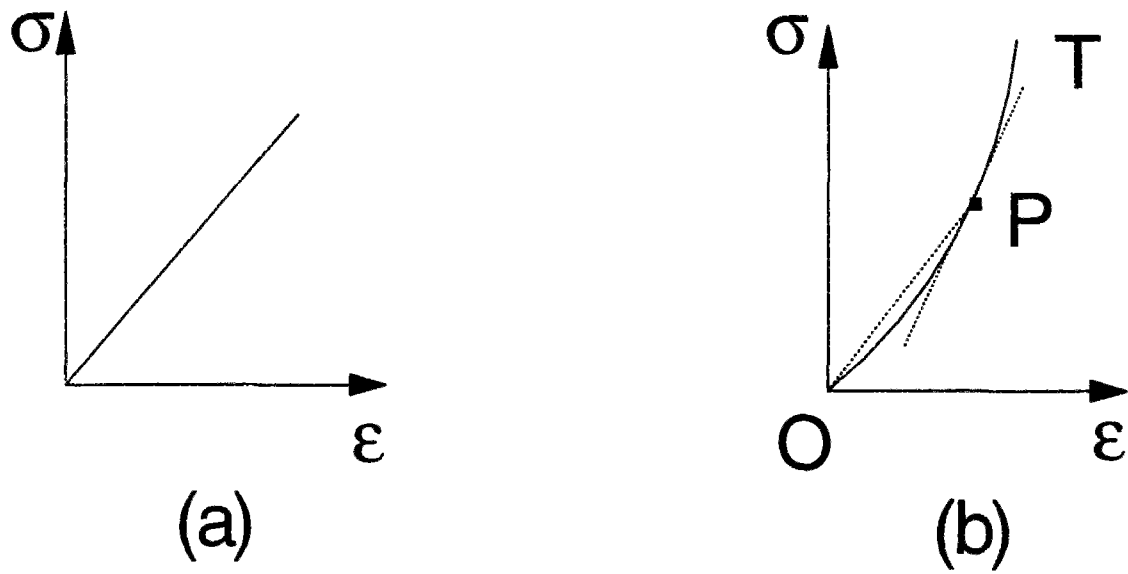


Figure 1.1: Courbes contraintes-déformations pour: a) matériau élastique linéaire, b) matériau élastique non-linéaire (Fjaer et al [1992])

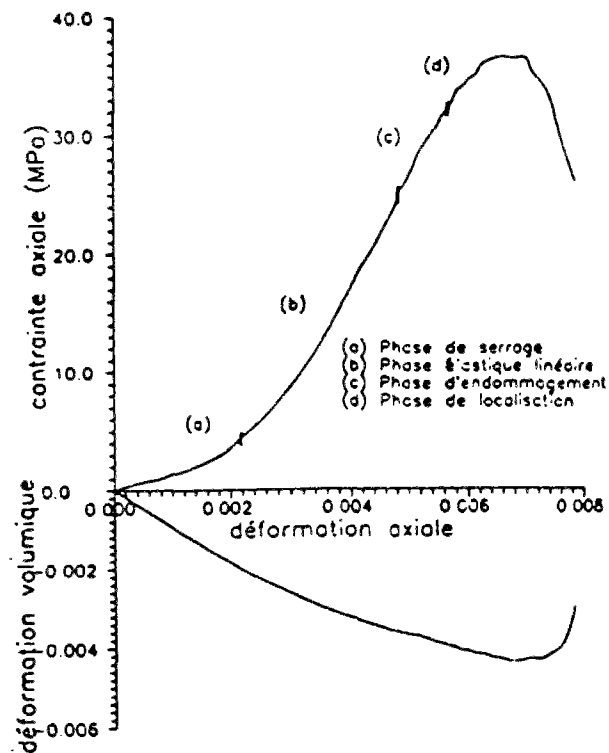


Figure 1.2: Courbe effort-déformation d'un échantillon de grès sous chargement uniaxial



### I.2.2 Plasticité

Pour les roches granulaires, le développement de déformations plastiques est dû à de multiples phénomènes tels que le glissement relatif entre les grains et le long des microfissures, l'activation et la création de microfissures, l'effondrement de l'espace poreux et la rupture des grains. Le glissement entre les grains étant un concept relié au frottement et à la cohésion du matériau, de nombreux critères de plasticité en mécanique des roches tels que le critère de Mohr-Coulomb ou Drucker-Prager (figure 2.5, chapitre II) s'inspirent de ce concept (Jaeger et Cook [1979], Halphen et Salençon [1987], Charlez [1991]).

Ainsi, les roches et en particulier le grès présentent un certain nombre de caractéristiques de comportement dont il faut tenir compte dans le développement des modèles constitutifs: dépendance en pression, écrouissage positif et radoucissement, caractère frottant, cohésif et dilatatant du matériau. L'analyse de nombreuses données expérimentales principalement sur le grès ont conduit Sulem et al [1995a] et Vardoulakis et al [1996a] à développer un modèle de comportement, pour le grès de Wildmoor, basé sur la théorie de l'écoulement plastique et sur les hypothèses suivantes: le second invariant de la déformation déviatorique plastique est une mesure du glissement plastique qui se produit entre les grains et à travers les microfissures de la roche. Au-delà de l'état de plastification initiale, l'angle de frottement mobilisé croît en fonction de la déformation plastique jusqu'à atteindre un état de saturation correspondant au frottement maximum mobilisable. D'autre part, au cours de la déformation de la roche, de nouvelles microfissures peuvent apparaître ou être activées. On peut ainsi supposer que le radoucissement est dû à une perte de résistance en traction de la roche. Ce mécanisme de radoucissement peut être présent tout au long du processus de déformation. Cependant, il devient plus important lorsque la roche perd sa capacité à mobiliser d'avantage de résistance frottante. On suppose donc que lors de la phase d'écrouissage en frottement, le radoucissement de la résistance en traction peut être négligé, et que celui-ci devient sensible seulement au-delà du pic de frottement maximal mobilisé. Cela conduit à un modèle de comportement plastique avec dans une première phase un écrouissage de type isotrope en frottement jusqu'à la mobilisation du frottement maximal suivi d'une phase de radoucissement de la cohésion de type cinématique (figure 1.3).

De nombreux auteurs (Raniecki et Bruhns[1981], Vardoulakis [1982], Chen et Han [1988]) se sont intéressés à la modélisation du comportement plastique des milieux granulaires. Pour

l'étude de différents grès, Sulem [1987] et Papamichos [1992] ont utilisé la théorie de déformation plastique, introduite par Budianski [1959], pour les métaux. Cependant, d'après Papamichos [1992], cette théorie ne peut décrire correctement le phénomène d'association avec chargement et déchargement au voisinage de la surface d'écoulement. Il est donc préférable d'utiliser la loi d'écoulement lorsque l'on est amené à étudier le comportement plastique d'un matériau sous chargement cyclique.

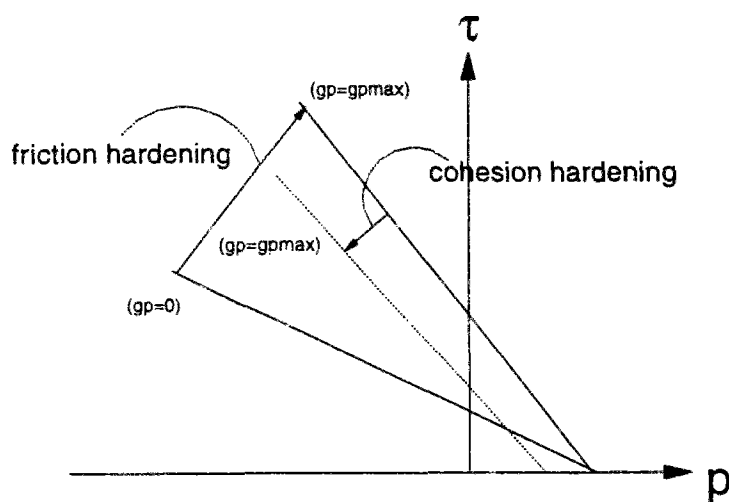


Figure 1.3: Critère de plasticité dans le plan  $(p, \tau)$ , écrouissage isotrope et cinématique (Sulem et al [1995a])

### I.2.3 Endommagement dans les matériaux

De nombreux travaux ont été consacrés à l'endommagement dont l'idée a été émise pour la première fois par Kachanov en 1958. D'un point de vue physique, l'endommagement correspond à la création de microvides ou de microfissures dans la matière. La mesure de leur surface ou de leur volume est une évaluation de l'endommagement qui reste difficilement mesurable expérimentalement. L'évaluation de l'endommagement adoptée par Lemaître et Chaboche [1978] est fondée sur le concept de contraintes effectives introduite par Rabotnov en 1968. Lemaître et Chaboche [1978] avaient de plus proposé la notion d'équivalence en déformation, souvent utilisée pour évaluer un endommagement isotrope.

Comme le soulignent Cordebois et Sidoroff [1982], la microfissuration joue un rôle important dans le processus de déformation et de rupture fragile des roches. La conséquence

macroscopique de ce phénomène est l'endommagement. L'endommagement d'un élément de volume peut être quantifié à l'aide de mesures locales ou globales mettant en évidence les variations de constantes physiques macroscopiques (élastiques ou autres).

Cordebois et Sidoroff [1982] ou Chaboche [1988a, 1988b] ont traité les problèmes de couplage entre l'élasticité et l'endommagement (isotrope ou anisotrope) d'une part et entre la plasticité et l'endommagement. Lemaître et Dufailly [1987] quant à eux se sont intéressés aux nombreuses techniques de mesure de l'endommagement (fragile ou ductile) telles que la mesure de la variation de la densité du matériau, la vitesse de propagation des ultrasons, la mesure de la résistance électrique ou encore l'évaluation de la variation du module d'élasticité en fonction de l'endommagement ductile comme on le voit sur la figure 1.4.

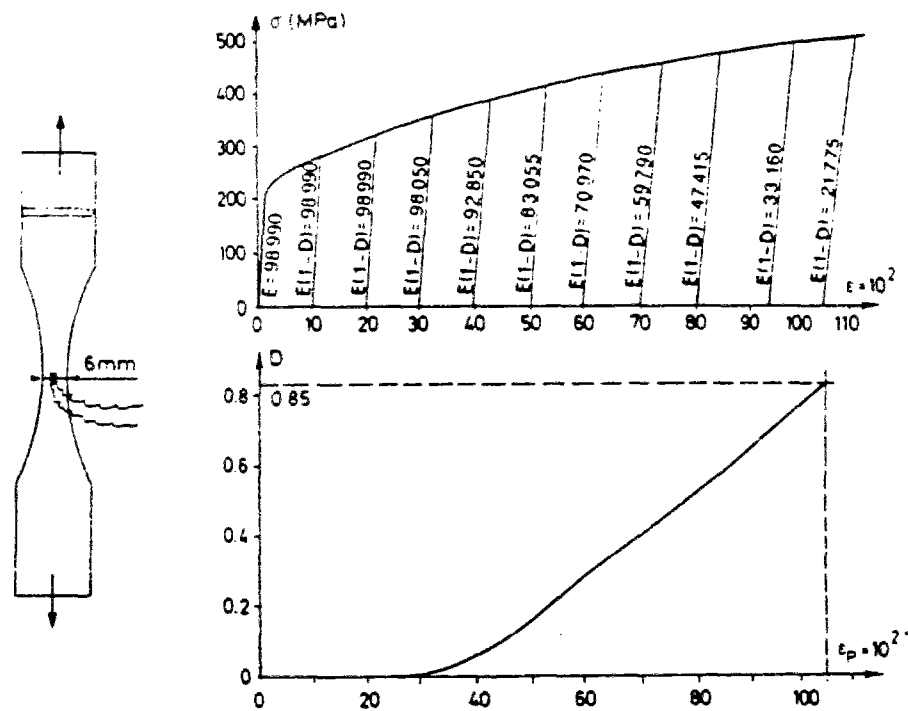


Figure 1.4: Représentation de l'évolution des déformations plastiques en fonction des contraintes et de l'endommagement ductile pour un échantillon de cuivre.(Lemaître [1990])

## I.2.4 Comportement d'une roche granulaire saturée

De nombreux auteurs se sont intéressés au comportement des matériaux granulaires saturés non-drainés, et à l'influence qu'à le fluide de saturation sur la localisation des déformations dans le matériau (Rice [1975], Vardoulakis [1985]). Pour modéliser le comportement et étudier la bifurcation d'un sol granulaire saturé par l'eau, Vardoulakis [1985] et Loret et Harireche [1991] ont considéré le milieu poreux saturé comme un milieu continu composé d'une phase solide et d'une phase aqueuse ayant ou non la même vitesse. Le comportement du squelette est décrit en terme de contrainte effective de Terzaghi [1936] par la théorie de l'élastoplasticité pour matériaux sans cohésion, dilatants et frottants. Sulem et Vardoulakis [1989], quant à eux, ont modélisé le comportement d'une roche granulaire (grès de Doddington) saturée dans le but d'étudier la stabilité des forages pétroliers. Pour le comportement du fluide, Sulem et Vardoulakis [1989] ont pris en compte la loi de Darcy généralisée, le squelette de la roche étant modélisé par la théorie de déformation de l'élastoplasticité.

Comme le souligne Rice [1975], une roche fissurée a tendance à se dilater lorsque sa déformation devient plastique proche de la rupture. Quand cette roche est saturée par un fluide et qu'elle est en condition non-drainée, la résistance du matériau a tendance à augmenter car le module d'écrouissage  $H$  a augmenté de  $\mu\beta M$  ( $M$  étant le module élastique de compression,  $\beta$  le coefficient de dilatance et  $\mu$  le coefficient de frottement). Si  $\mu\beta M$  est suffisamment grand, la courbe contrainte-déformation en condition non-drainée continue à augmenter jusqu'à ce que  $H$  devienne négatif, comme on le voit sur la figure 1.5.

Sulem et al [1995a] ont étudié l'influence du fluide de saturation (KCL et Pétrole) sur les propriétés mécaniques du grès rouge de Wildmoor. Ils ont remarqué que le KCL réduit le module élastique de cisaillement, par contre l'effet du pétrole est minime. En ce qui concerne les propriétés plastiques, l'angle de frottement mobilisé n'est pas vraiment affecté par la saturation, cependant la cohésion du matériau saturé au KCL diminue sensiblement.

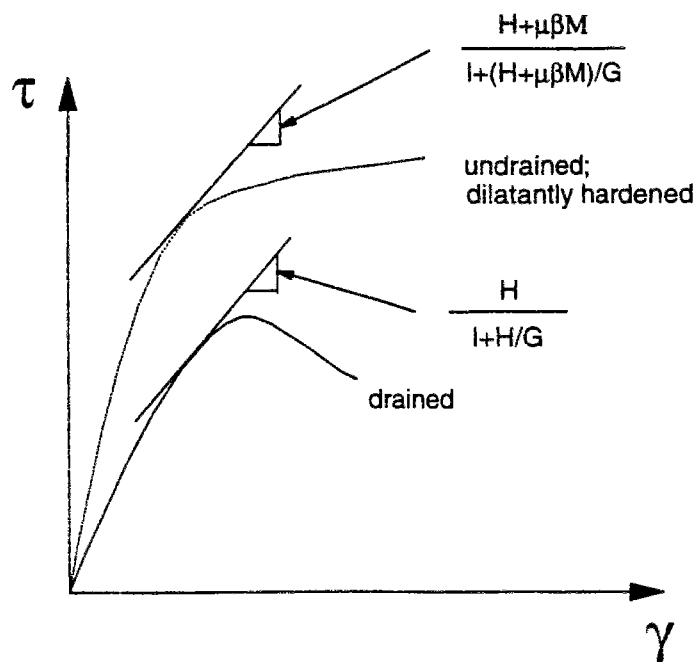


Figure 1.5: Comparaison des courbes contraintes-déformations en condition drainée et non-drainée. (Rice [1975])

### I.3 Phénomènes de bifurcation dans le grès

En géotechnique on est souvent confronté à la stabilité de structures ou d'ouvrages souterrains. On cherche à estimer quand et comment la roche va se rompre. On utilise parfois la mécanique des milieux continus en traitant la stabilité à l'aide de critères de limite élastique. On a également recours à la mécanique de la rupture, la stabilité est alors analysée par des critères de propagation de fissure. Cependant, comme le fait remarquer Guenot [1988], si nous souhaitons parler de stabilité, nous devons adjoindre aux deux théories locales précédentes une approche relevant de la théorie de la bifurcation. Mathématiquement la bifurcation correspond à la perte d'unicité des solutions des équations qui gouvernent le problème (équation d'équilibre, loi de comportement). A l'approche de la rupture, la déformation des roches cesse d'être homogène ou diffuse, pour évoluer plus ou moins brutalement vers des modes qui mettent en jeu des blocs rigides avec des zones de glissement relatif, fissures, interfaces, bandes de cisaillement (Desrues [1991], figures 4.4 et 4.5 chapitre IV). La

localisation de la déformation est ainsi un phénomène à considérer dès qu'on s'intéresse à la rupture, soit pour l'éviter (stabilité des forages), soit pour la provoquer (outils de forages). Dans un essai de compression triaxiale ou biaxiale on observe deux modes possibles de bifurcation, transition entre un état initial des déformations homogène et un état non homogène. On a ainsi soit une bifurcation diffuse soit une bifurcation localisée qui se traduit par la formation de bandes de cisaillement (modes de bifurcation pour un essai triaxial figure 1.6, modes de bifurcation pour un essai biaxial figure 1.7). Le problème le plus souvent abordé est celui du passage de l'endommagement diffus "en volume" à l'endommagement localisé sur "une surface". Son intérêt, comme le montre Dragon [1991], vient du fait que l'on ne dispose pas, à l'heure actuelle, de lien entre les deux démarches connues de la mécanique en ce qui concerne la détérioration.

- la mécanique qui décrit le comportement non linéaire plastique et/ou endommagement en "volume" et
- la mécanique de la rupture classique, linéaire ou non, qui étudie la propagation des fissures préexistantes.

L'établissement d'un critère général d'amorçage d'une macro-fissure apparaît dans ce contexte comme l'un des enjeux importants de la mécanique contemporaine. En même temps, on peut émettre l'hypothèse que l'enchaînement entre le comportement du matériau en "volume" et les phénomènes de rupture surfacique pourraient être raisonnablement traités par une approche des phénomènes de la localisation vus comme bifurcation suivant des modes particuliers du problème aux limites.

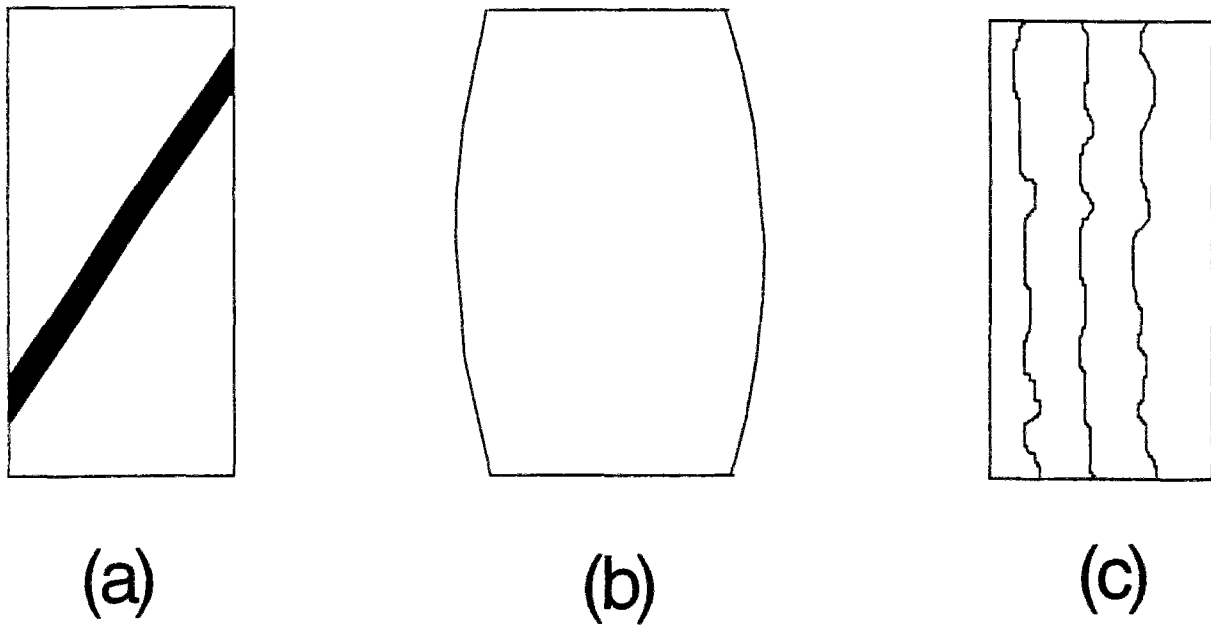


Figure 1.6: Test triaxial: Bifurcation localisée et diffuse: (a) bande de cisaillement, (b) mise en tonneau, (c) clivage axial (Sulem et al [1990])

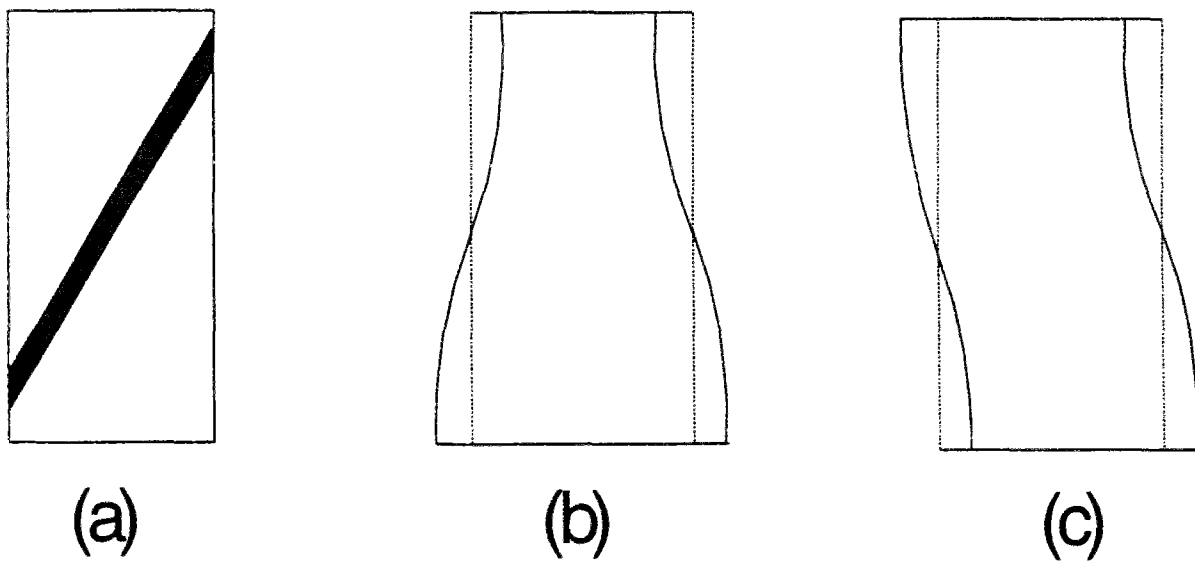


Figure 1.7: Test biaxial: Bifurcation localisée et diffuse: (a) bande de cisaillement, (b) mode symétrique (mise en tonneau), (c) mode antisymétrique (flambement) (Vardoulakis [1981], Vardoulakis et al [1995])

### I.3.1 Rupture et fissuration dans le grès

A première vue, comprendre les mécanismes qui régissent la rupture du grès est simple. Le grès peut être considéré comme un ensemble de grains de quartz, de feldspars et d'albite cimentés par une matrice argileuse. D'après Santarelli [1988], les micro-mécanismes qui sont susceptibles de conduire le grès à la rupture évoluent avec le rapport matrice sur grains (volume occupé par la matrice argileuse/volume occupé par les grains) et la différence entre les ténacités des grains et de la matrice. Ainsi, un rapport matrice sur grains proche de zéro et une ténacité des grains bien supérieure à celle de la matrice ne favorise pas la formation d'une macrofissure unique et bien définie. A peine initiée, la microfissure se trouve bloquée par un grain et doit bifurquer pour continuer à se propager, cependant la fissuration peut être soit intergranulaire soit intragranulaire, telqu'on le voit sur la figure 1.9a et 1.9b. Sur la figure 1.9d, d'après Ord et al [1991], nous avons la représentation d'une zone de cisaillement pour un échantillon de grès de Gosford qui conduit à la rupture, on observe la présence de grains fortement brisés et autour de la macrofissure (figure 1.9c) s'est développé tout un réseau de microfissures.

Santarelli [1988], quant à lui a remarqué que le grès de Doddington affecté d'une dilatance très diffuse se rompt en compression simple en produisant une grande quantité de sable. Une dilatance très diffuse a également été observée dans le grès de Castlegate avant le pic de résistance à la rupture lors d'essais triaxiaux sous scanner. Cette dilatance serait attribuée à une décohésion des grains de quartz plutôt qu'à leur microfissuration et elle n'affecte pas d'avantage la zone qui deviendra le lieu de la macrofissure que la partie centrale de l'échantillon non affectée par des effets de bords. La macrofissure peut être déclenchée à la suite de l'apparition d'une hétérogénéité locale liée à une porosité initialement plus forte, ou bien, comme le suggère Ord [1991] après avoir réalisé des essais biaxiaux sur le grès de Gosford, les microrotations et déplacements des grains pourraient être à l'origine de la localisation de la déformation.

Comme le soulignent Ord et al [1991], ces réarrangements de grains s'avèrent très difficiles à mesurer expérimentalement à cause de l'hétérogénéité même du grès non déformé observé au MEB (figure 1.8), pourtant ils pourraient expliquer les zones de déformations plus diffuses que l'on peut observer le long du plan de rupture final. Ces zones sont caractérisées, toujours



d'après Ord [1991], par un fort rapport matrice sur grain si bien que les grains peuvent s'accommoder au cisaillement en se réarrangeant sans se fracturer.

Les observations qu'ont pu faire Santarelli et Brown [1989] sur le grès de Doddington montrent que sous très faible confinement, la déformation se localise le long d'une paire de plans de cisaillement conjugués, associés à une paire de gouge. Sous un confinement moyen, elle se concentre le long d'un plan incliné bien marqué et d'une série de plans croisés. Sous très fort confinement, elle affecte une large bande de gouge inclinée par rapport à la verticale et le matériau ne perd pas sa cohésion à la fin du test, comme le montre la figure 1.10. Dans ces trois cas, la zone rompue consiste en un ou plusieurs plans de cisaillement inclinés par rapport à la direction de compression maximale et présente une certaine épaisseur, discernable à l'oeil nu.

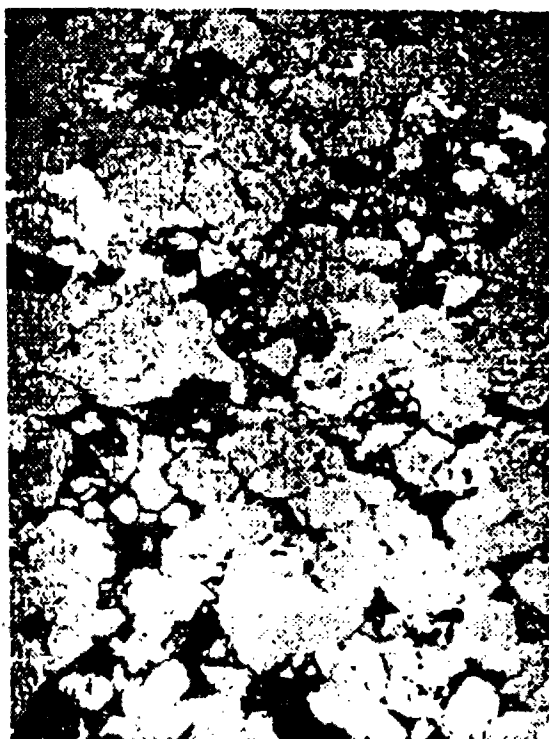


figure 1.8: Micrographie à balayage électronique du grès de Gosford. (Ord et al. [1991])

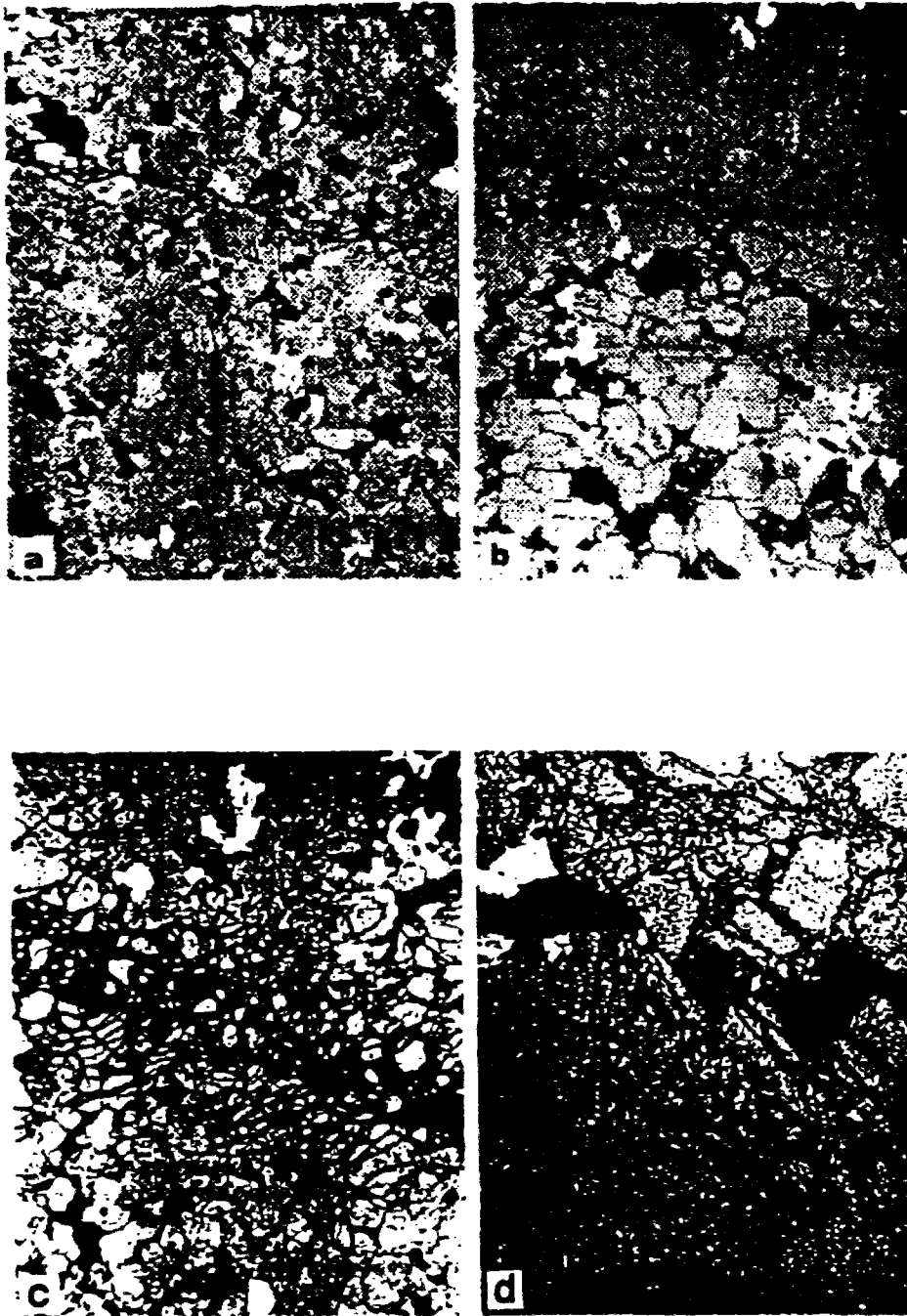


Figure 1.9: Micrographie à balayage électronique d'une zone de cisaillement avant (a et b) et après (c et d) la rupture de l'échantillon. (Ord et al [1991])

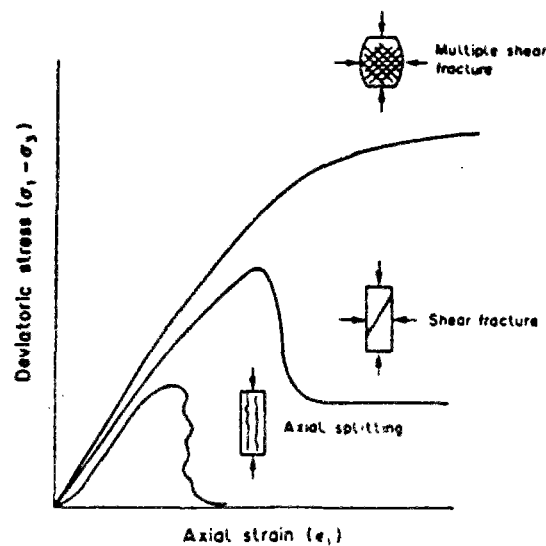


Figure 1.10: Classification des fissures pour un essai triaxial. (Santarelli et Brown [1989])

### I.3.2 Techniques de visualisation de la localisation des déformations

L'industrie pétrolière a été la première à utiliser le scanner afin de sonder les carottes remontées de forages pour suivre l'écoulement de fluides dans un milieu poreux ou encore pour connaître la masse volumique, la porosité ou l'état de saturation d'une roche.

Aujourd'hui, d'après Desrues et Mokni [1991], Tillard [1992] et Desrues et al [1996], la tomodynamométrie est devenue une méthode non destructive qui permet d'analyser localement la réponse volumique d'un échantillon à une sollicitation mécanique en nous révélant l'initiation, la progression et l'organisation spatiale de son endommagement. L'ouverture de microfissures pour laquelle se manifeste l'endommagement de certaines roches entraîne en effet une augmentation de la porosité du matériau qui se traduit par une baisse de la densité radiologique enregistrée par le scanner.

Des cellules triaxiales en aluminium ou en béryllium dites "transparentes aux rayons X" peuvent être installées dans les scanners même, comme le suggère la figure 1.11, si bien que toutes les phases de l'écrasement de l'échantillon peuvent être suivies au scanner. Le scanner permet également de déceler les effets de bord induits par les contacts entre l'échantillon et le système de chargement lors d'essais triaxiaux sur les roches. En détectant la perte d'homogénéité de l'échantillon, le scanner permet également d'éliminer les mesures qui,

situées au-delà de ce seuil sont impropres en vue du calage des données sur une loi de comportement classique. Finalement le scanner nous apporte de précieuses informations concernant le rôle que jouent les hétérogénéités du matériau sur la localisation de la déformation lors des essais en laboratoire.

La stéréophotogrammétrie de faux relief, quant à elle, est une technique mise au point pour visualiser les différentes étapes de la fissuration lors d'essais de déformation plane (essai au biaxial ou au triaxial vrai). D'après Desrues et Duthilleul [1984] et Torrenti et al [1988], cette technique permet d'analyser avec une grande précision les différences entre deux clichés. Elle a été utilisée dès le début des années soixante-dix par des chercheurs anglais et polonais. Elle repose sur la vision stéréoscopique qui est utilisée pour restituer une troisième dimension effective, et la mesurer. Une fissure, ouverte ou non, apparaît en stéréoscopie de faux relief comme une falaise entre deux plateaux. Il est ainsi possible de détecter en stéréoscopie des fissures qui n'apparaissent pas à l'examen direct des clichés, lorsqu'il n'y a eu aucune ouverture entre les lèvres d'une fissure mais seulement un glissement de celles-ci.

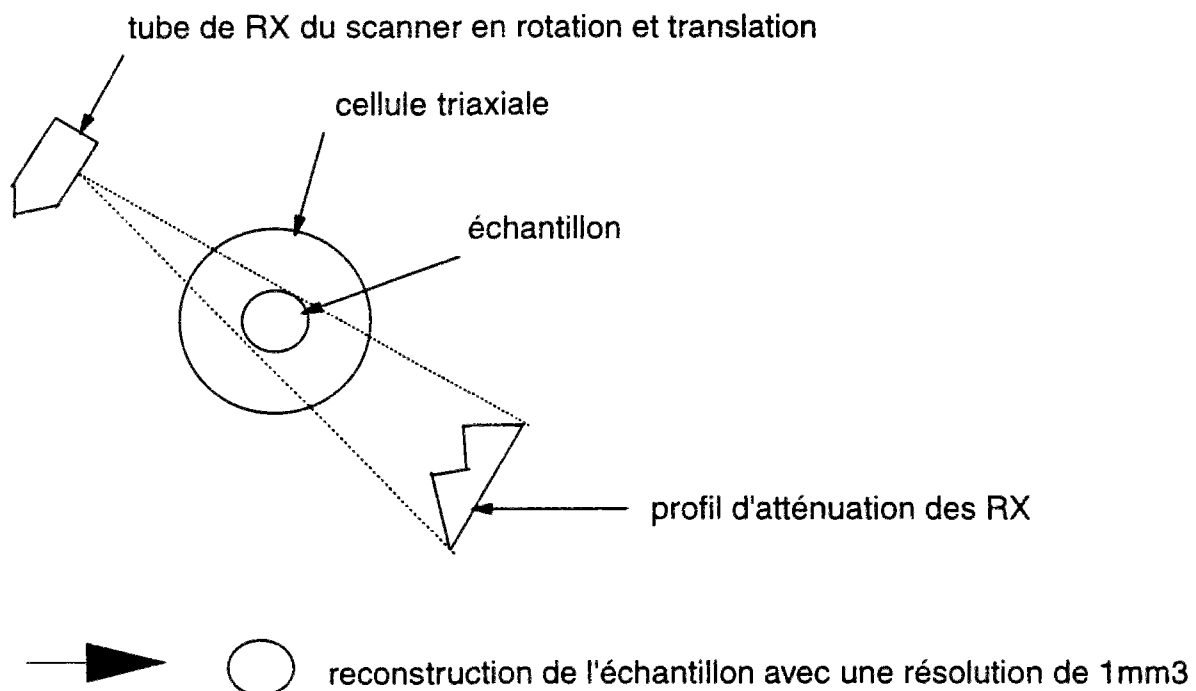


Figure 1.11: Principe du scanner. (Tillard [1992])

### I.3.3 Localisation des déformations en bandes de cisaillement

Dans les années soixante-dix, Rudnicki et Rice [1975] ont introduit une formulation quasi statique de la théorie de la localisation des déformations. La démarche suivie consiste à rechercher si, la description rhéologique de la loi de comportement permet d'obtenir une solution, compatible avec les conditions aux limites, et comportant un mode de déformation localisée en bande de cisaillement. Rice [1976] a ainsi proposé de considérer le début de la rupture comme une instabilité du système correspondant localement à la perte d'ellipticité des équations d'équilibre continu en vitesses.

Dans le cas d'un comportement fragile des roches, le frottement joue un rôle important à l'échelle des microfissures, l'existence d'un régime d'arête pour la surface de charge ou "yield vertex" (Rudnicki et Rice [1975], Wawersik et al. [1990]), peut avancer l'instant de la localisation (Haïed [1995]).

Rudnicki et Rice [1975] et Rice [1976] ont étudié une loi de comportement élastoplastique non-associée de type Drucker-Prager; ils montrent notamment que dans le cas des lois de comportement élastoplastiques associées (le coefficient de frottement et le coefficient de dilatance sont égaux), la localisation des déformations ne peut avoir lieu qu'en régime d'écrouissage négatif. Les études expérimentales montrent en général que ce seuil a lieu avant le pic (Desrues [1984], Desrues et Chambon[1988]), de nouveaux résultats expérimentaux provenant de tests biaxiaux sur du grès montrent également que la formation de bandes de cisaillement peut se produire dans le régime d'écrouissage positif (Ord et al. [1991]). Par contre, pour une loi non-associée, on obtient un seuil de localisation en régime d'écrouissage positif (Vardoulakis [1983b], Sulem et al. [1993]).

D'ailleurs comme l'a constaté Molenkamp [1985], parmi les modèles élastoplastiques classiques comme Mohr-Coulomb ou Lade-Duncan, de grandes variations existent dans les prévisions de l'inclinaison et l'initiation des bandes de cisaillement.

Dans leur article, Ord et al [1991], montrent que dans un matériau cohérent et frottant tel que le grès, soumis à des déformations planes, la formation des bandes de cisaillement se produit pendant le régime d'écrouissage positif (module d'écrouissage  $H > 0$ ). Cette hypothèse rejoint celle émise par Sulem et al [1993].

Ord et al [1991] ont également remarqué que le module d'écrouissage obtenu expérimentalement reste supérieur à celui obtenu grâce aux critères de plasticité du type Mohr-Coulomb ou Drucker-Prager.

D'après, Dragon [1991], la localisation de la déformation dans une bande entraîne une localisation de l'endommagement, ce qui constitue pour ce dernier une sorte de transition singulière en mode surfacique. D'ailleurs Sulem, Ord et Vardoulakis [1991] ont pris en compte l'endommagement dans leur loi d'écoulement élastoplastique ce qui a permis de décrire une localisation des déformations en régime d'écrouissage positif. Un modèle plus raffiné, prenant en compte l'anisotropie induite par microfissuration de la roche, a été traité récemment. Sulem et al [1993] tiennent compte de l'anisotropie induite par les contraintes, pour modifier la théorie classique de l'écoulement plastique (figure 1.12). Papamichos et Vardoulakis [1995] quant à eux se sont intéressés à la théorie de la plasticité non-coaxiale, les résultats théoriques qu'ils ont obtenus sur l'orientation des bandes de cisaillement et leur initiation sont en bon accord avec les observations faites lors d'essais biaxiaux sur le sable.

De nombreux auteurs, comme Papamichos et Vardoulakis [1995], ont constaté l'insuffisance de la théorie de l'écoulement plastique coaxiale pour la prédiction de la bifurcation en bande de cisaillement dans les échantillons pour des essais triaxiaux bien que ces bifurcations soient observées expérimentalement, ils ont pallié cette insuffisance en introduisant un coefficient de non-coaxialité pouvant être calé sur les caractéristiques de la localisation comme l'initiation ou l'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement.

La théorie des déformations, introduite par Budiansky [1959], qui est une loi de comportement non-coaxiale permet, comme le souligne Papamichos [1992], de prédire une bifurcation pour les essais triaxiaux bien que les résultats obtenus concernant l'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement ne soient aussi proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus par la théorie de l'écoulement plastique non-coaxiale. La théorie des déformations comme l'ont rappelé Leroy et Triantafyllidis [1996] est une loi hypoplastique ayant les mêmes propriétés que le modèle de plasticité avec une surface irrégulière ("Yield vertex"). Comme l'a montré Diouta Ngamy [1995], pour le grès de Fontainebleau, compte tenu de la nature fragile et microfissurée de cette roche, un modèle à surface de charge irrégulière ("Yield vertex") basé sur l'activation préférentielle des microfissures en fonction de la direction du chargement rend mieux compte du comportement du grès. Dans ce cadre un

terme additionnel dit coaxial non-linéaire s'ajoute à l'incrément de déformation plastique classique. Pour mieux affiner les résultats Diouta Ngamy [1995] propose un modèle complet de fissures qui donne des résultats proches des observations expérimentales concernant l'inclinaison des bandes de cisaillement.

Les modèles prenant en compte l'anisotropie induite et la non-coaxialité donnent de bons résultats concernant la prédiction de la formation et de l'orientation des bandes de cisaillement (Vardoulakis [1995]). Par contre les modèles de plasticité classique coaxiaux ne permettent pas de modéliser correctement les résultats expérimentaux de la formation des bandes de cisaillement, car le comportement des roches est fortement lié à leur structure microfissurée. Dans le cas des roches, d'après Aubry et Modaressi [1991] les mécanismes de déformations sont liés à la fermeture, au glissement, à l'ouverture et à la propagation des microfissures. Le comportement anélastique des roches fragiles en compression se manifeste entre autres par l'apparition d'une dilatance ainsi que d'une anisotropie induite par les contraintes.

Pour les modèles élastoplastiques classiques l'analyse de la localisation ne donne pas d'information sur l'épaisseur de la bande de cisaillement; cette épaisseur est de fait indéterminée. Vardoulakis [1974] a avancé l'idée que la perte spontanée d'homogénéité des déformations se manifestant par la formation d'une bande de cisaillement prouve l'existence d'une longueur interne. De nombreux résultats expérimentaux ont montré que la bande de cisaillement dans les matériaux granulaires concerne un nombre important de grains, en effet les observations expérimentales de Roscoe [1970] ont montré que la largeur de la bande de cisaillement correspond à peu près à dix fois la taille moyenne du diamètre d'un grain.

L'analyse théorique de la localisation ne donne pas d'informations sur l'épaisseur de la bande de cisaillement, cette épaisseur est de fait supposée nulle. La prévision d'une épaisseur de bande nécessite l'introduction d'une longueur caractéristique (ou interne) dans la loi de comportement. Une telle démarche a été développée dans la théorie de Cosserat par Mühlhaus et Vardoulakis [1987] et Vardoulakis et Sulem [1993]. D'ailleurs, pour traiter théoriquement ou numériquement de la rupture dans les grès, de nombreux auteurs Papamichos et al [1990], Sulem et Vardoulakis [1990], Papanastasiou et Vardoulakis [1992] ont déjà appliqué aux milieux de Cosserat (le modèle de Cosserat est sensé décrire correctement les milieux granulaires en homogénéisant les micromécanismes qui les affectent) le modèle de comportement rigide plastique écrouissable dans le cadre de la théorie de la bifurcation.

La théorie de la bifurcation telle que formulée par Rudnicki et Rice [1975] et Rice [1976] dans le cas quasi statique est un cadre adapté pour l'étude de la localisation des déformations dans les roches fragiles. Dans ce cadre, il est apparu que les lois de comportement jouent un rôle important dans l'apparition du mode de déformation localisé et doivent donc intégrer les aspects physiques importants de la déformation des roches: non linéarités, anisotropie induite, endommagement, dilatance par microfissuration et sensibilité des modules élastiques par rapport aux contraintes (pression moyenne et déviateur).

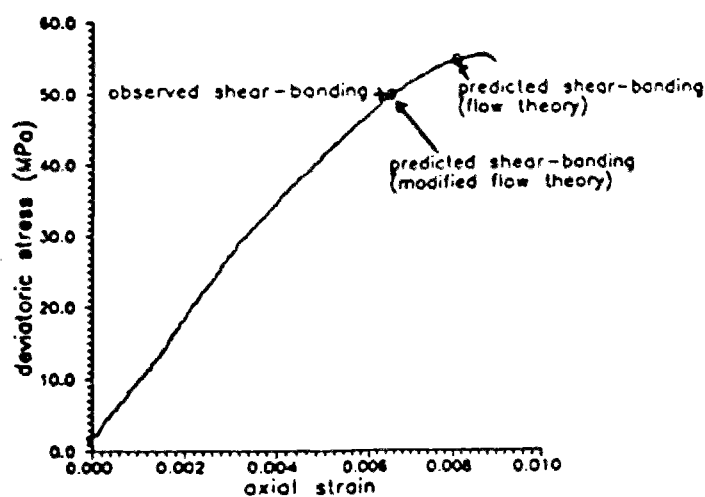


Figure 1.12: Observations expérimentales et prédictions théoriques de la formation de bandes de cisaillement pour le grès de Gosford. (Sulem et al [1993])

### I.3.4 Bifurcation diffuse

L'analyse de la bifurcation diffuse a fait l'objet de plusieurs études, Vardoulakis [1981] s'est intéressé aux modes de bifurcation d'un échantillon de sable en déformation plane; il a remarqué que la densité du sable a de l'influence sur le mode de bifurcation (pour un échantillon de sable moyennement dense le mode antisymétrique se produit plus tôt), au même titre que l'élancement de l'échantillon. Bardet [1991] a quant à lui présenté des solutions analytiques complètes pour la bifurcation diffuse concernant les matériaux



compressibles soumis à un chargement en déformation plane. Chau et Rudnicki [1990] ont étudié la bifurcation, d'un échantillon en déformation plane, incluant les modes localisés et diffus (figure 1.7). Ils ont pris en compte l'effet des contraintes latérales. En ce qui concerne l'analyse de bifurcation d'un test en compression plane, Young [1976] a trouvé que le premier mode est toujours antisymétrique dans le régime elliptique imaginaire, et pour un échantillon suffisamment long et mince le mode obtenu est antisymétrique mais en régime elliptique complexe (figure 1.7).

Quant aux essais axisymétriques; une analyse de bifurcation d'un test triaxial; sur un matériau cohésif, frottant et dilatant; est abordée par Sulem et Vardoulakis [1990]; une théorie élastoplastique tenant compte de la microstructure du matériau (Modèle de Cosserat) est choisie. Le but de cette étude est l'analyse du comportement de l'échantillon (grès) lorsqu'il y a perte d'homogénéité des déformations ceci en mode diffus (mise en tonneau, formation de colonnettes), ainsi que la détermination de la largeur de la bande de cisaillement (grâce au modèle de Cosserat). Les résultats obtenus nous montrent que la formation des bandes de cisaillement et le mode diffus de bifurcation avec de courtes longueurs d'ondes se produisent simultanément. (figure 1.13) Ceci peut expliquer le fait que pour des tests triaxiaux, avec pression de confinement non nulle, le mode localisé est dominant, par contre pour des essais non confinés on obtient le mode diffus de formation de colonnettes. On remarque également que la bifurcation de l'échantillon dépend de son élancement (rapport hauteur sur diamètre). Plus l'échantillon est long et mince moins il est stable et plus tôt se produit la bifurcation (figure 1.14). Considérant le modèle de plasticité de Cosserat et l'existence d'une longueur interne  $l$  reliée à la taille des grains, on remarque que plus l'élancement de l'échantillon est important par rapport à la longueur de ses grains plus tôt se produit la bifurcation (Sulem et Vardoulakis [1990], figure 1.15). Les bifurcations en tant que modes géométriques diffus et modes localisés en bande de cisaillement, sont des phénomènes souvent observés en laboratoire. Par conséquent, une analyse détaillée de la bifurcation qui inclue les modes diffus et la relation de leur apparition avec le début de la localisation peut être intéressante pour le processus de rupture.

Dans le test de compression axisymétrique, la localisation de la déformation est souvent liée au mode de rupture final pour les roches. L'analyse dont font état Rudnicki et Rice [1975], suggère une localisation post-pic. Plus spécifiquement, l'article de Chau [1992], prend en

considération la bifurcation d'un échantillon cylindrique en déformation axisymétrique sous compression ou traction. Un modèle constitutif linéaire incrémental incluant une anisotropie transversale et une non normalité est employé dans cette étude de Chau [1992].

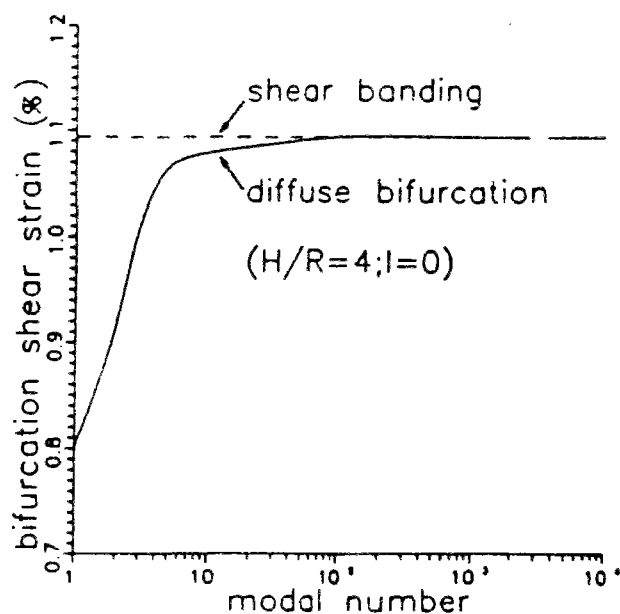


Figure 1.13: Représentation de la formation de bandes de cisaillement et de la bifurcation diffuse. (Sulem et Vardoulakis [1990])

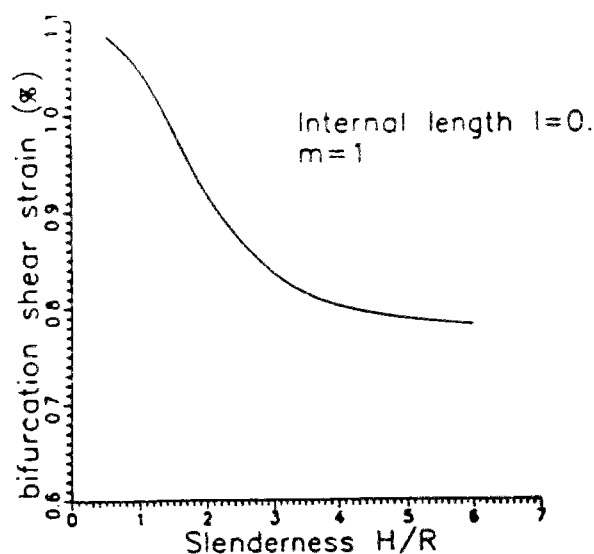


Figure 1.14: Effet de l'élancement sur la stabilité de l'échantillon. (Sulem et Vardoulakis [1990])

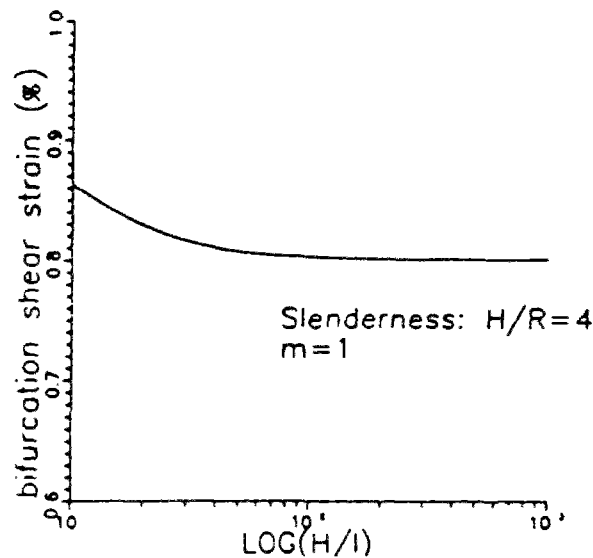


Figure 1.15: Effet de la longueur interne sur la stabilité de l'échantillon. (Sulem et Vardoulakis [1990])

## I.4 Stabilité des forages

Beaucoup de forages pétroliers, en particulier lors du développement d'un nouveau champ, sont souvent sujets à des problèmes de tenue de parois, qui engendrent coincements, rupture des tiges de forages, opérations de repêchage, perte d'une partie ou de la totalité du forage déjà réalisé. Toutes ces conséquences entraînent des pertes de temps extrêmement coûteuses, surtout lors des forages en mer (Maury et Sauzay [1988]). Même si, comme le souligne Guenot [1987], l'expérience des hommes de terrain et de laboratoire permet, la plupart du temps, de trouver un remède adéquat, c'est toujours au prix d'essais successifs plus ou moins fructueux. C'est pour cette raison qu'à été entreprise, voici quelques années, une étude approfondie sur ce phénomène de rupture des parois, une meilleure compréhension ne pouvant qu'améliorer les procédures de préparation des sondages (Maury [1993]).

### I.4.1 Contraintes autour d'un forage

Quand un puits est foré dans un massif soumis à un champ de contraintes in situ compressives (figure 1.16), la paroi du forage doit supporter le chargement que la matière extraite supportait avant le creusement du puits et si cette paroi n'est pas assez solide, la nouvelle concentration de contraintes conduit à l'effondrement du forage (figure 1.17). Afin d'éviter cette rupture en compression sans toutefois dépasser la résistance en tension de la roche, les foreurs doivent trouver la pression de boue la plus basse capable d'assurer la stabilité du forage (figure 1.18).

Si cette pression de boue est déterminée en considérant les contraintes en paroi de forage déduites d'un calcul élastique dans les critères classiques de résistance en tension ou en compression des matériaux rocheux, elle est nettement surestimée. Ainsi d'après Guenot [1987], la contrainte circonférentielle ( $\sigma_{\theta c}$ ) calculée par l'élasticité quand la rupture a lieu, dépasse de deux à huit fois le pic de résistance uniaxiale à la rupture de la roche  $q$  (avec  $N_s = \sigma_{\theta c}/q$ , tableau 1.1). De plus, il semble mal approprié de caler un modèle de comportement sur les résultats d'essais uniaxiaux dans le but d'étudier les phénomènes d'instabilité de forage, il faudrait utiliser les résultats d'essais triaxiaux classiques en négligeant le rôle tenu par la contrainte intermédiaire ou bien privilégier les résultats d'essais biaxiaux qui, conduits sans contrainte latérale en déformation plane reflètent assez bien l'état de contrainte en paroi de forage quand la pression de boue est nulle mais ne simulent pas l'hétérogénéité du champ de contraintes autour du forage.

En travaux souterrains (forages pétroliers, tunnels...) apparaissent souvent des ruptures par éclatement des roches à la paroi des cavités. Si, comme le font remarquer Kondo et al. [1988], les méthodes élastoplastiques jusqu'alors utilisées pour ces ouvrages sont très utiles pour le calcul des contraintes agissant sur le bord du forage, on constate qu'elles sont insuffisantes pour décrire les ruptures réellement observées (Berest et al. [1979]) car ces ruptures résultent généralement de déformations non continues apparues autour des ouvrages. Fjaer et al. [1992] et Pellegrino et al [1996] ont montré l'influence que peut avoir la loi de comportement choisie sur la détermination des contraintes agissant sur le bord d'un forage, en comparant une loi élastique linéaire avec une loi de comportement avec élasticité non-linéaire pour déterminer respectivement les contraintes autour d'un forage et d'un cylindre creux en grès de Rothbach.

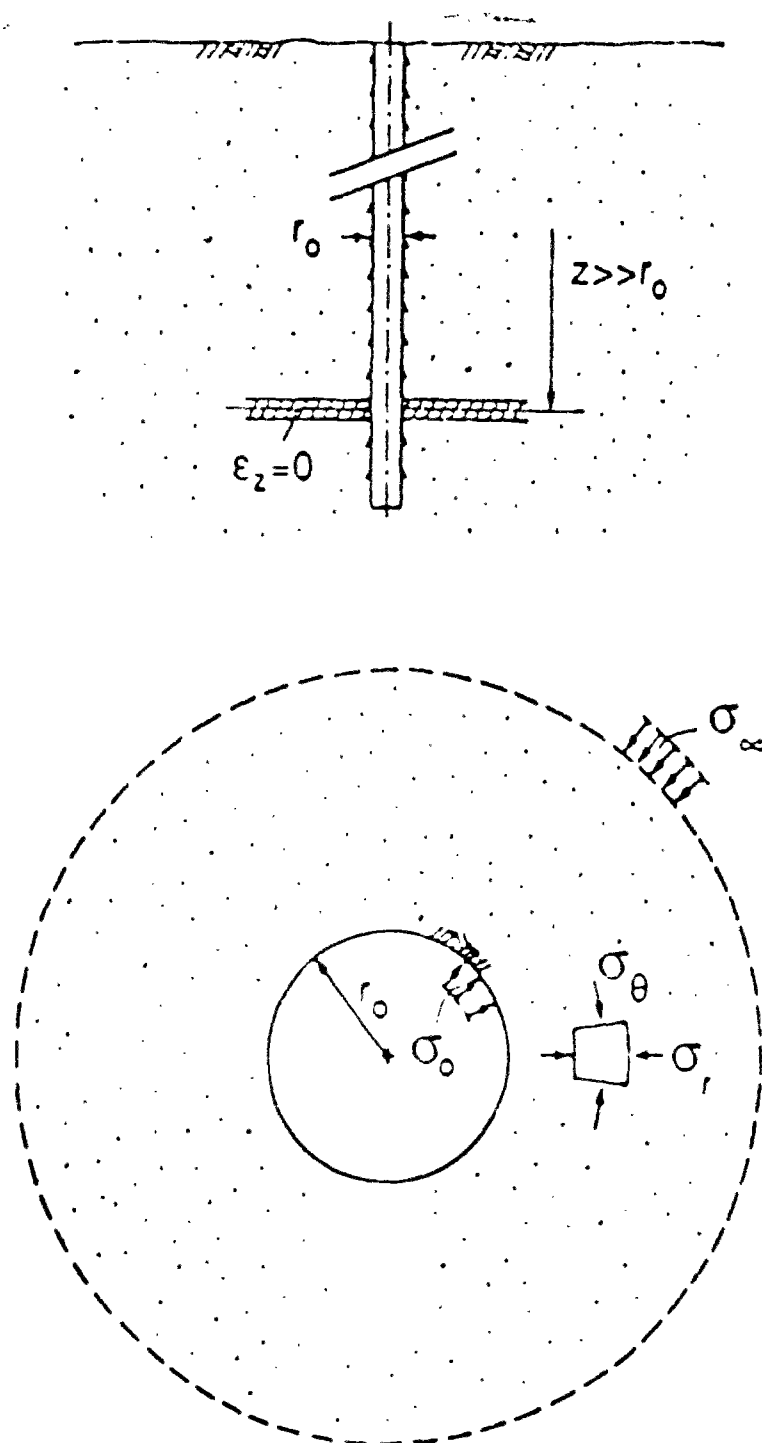


Figure 1.16: Etat de contraintes autour d'un forage. (Vardoulakis et al [1988])

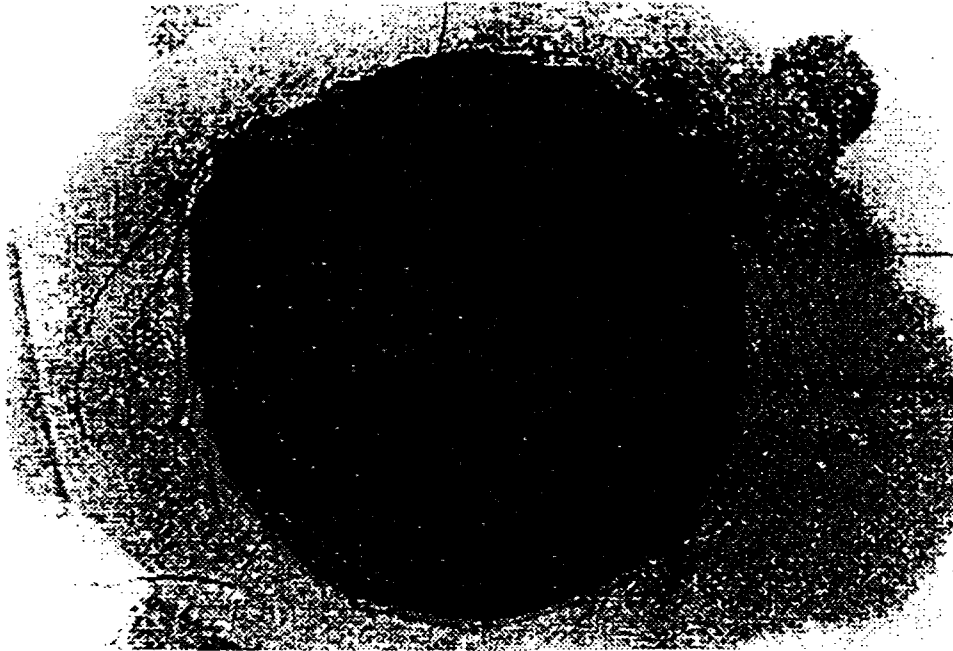


Figure 1.17: Exemple d'écaillage d'un cylindre creux à bords épais en calcaire d'Anstrude. (Guenot [1989])

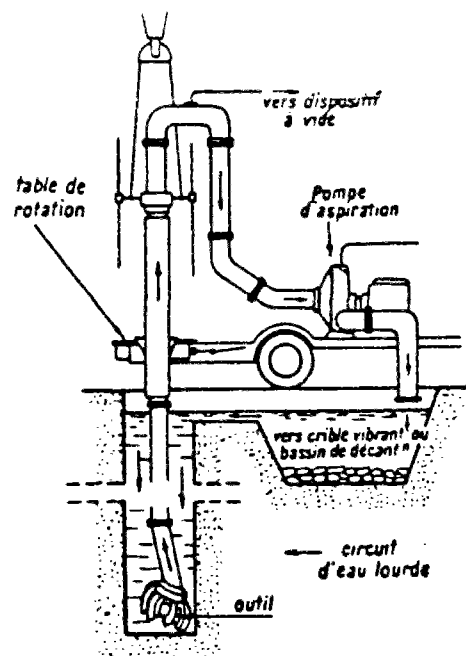


Figure 1.18: Circulation inverse de la boue dans un forage

Auteur principal	Roche	Pression interne (Mpa)	$N_S$
Obert	Calcaire	0	2.45
	Grès	0	1.82
	Marbre	0	2.75
Berest	Craie	0	1.8/2.6
Guenot	Charbon	0	2
Haimson, Edl	Grès	0	1.8/2.3
Simonyants	Calcaire	0/60	2/3.8
	Dolomie	0/60	2/4
	Marbre	0/60	5/8
	Grès	0/60	1.9/5.8
	Siltstone	0/60	3.2/3.55
Geerstma	Grès	?	1/16
Gay	Grès	0	2.3
Mastin	Grès	0	1.9
Haimson, Herrick	Calcaire	0	1.6/3.6
Bandis, Barton	Artificielle	0	1.5/3

Tableau 1.1: Résultats d'essais de rupture sur cylindres creux. (Guenot [1987])

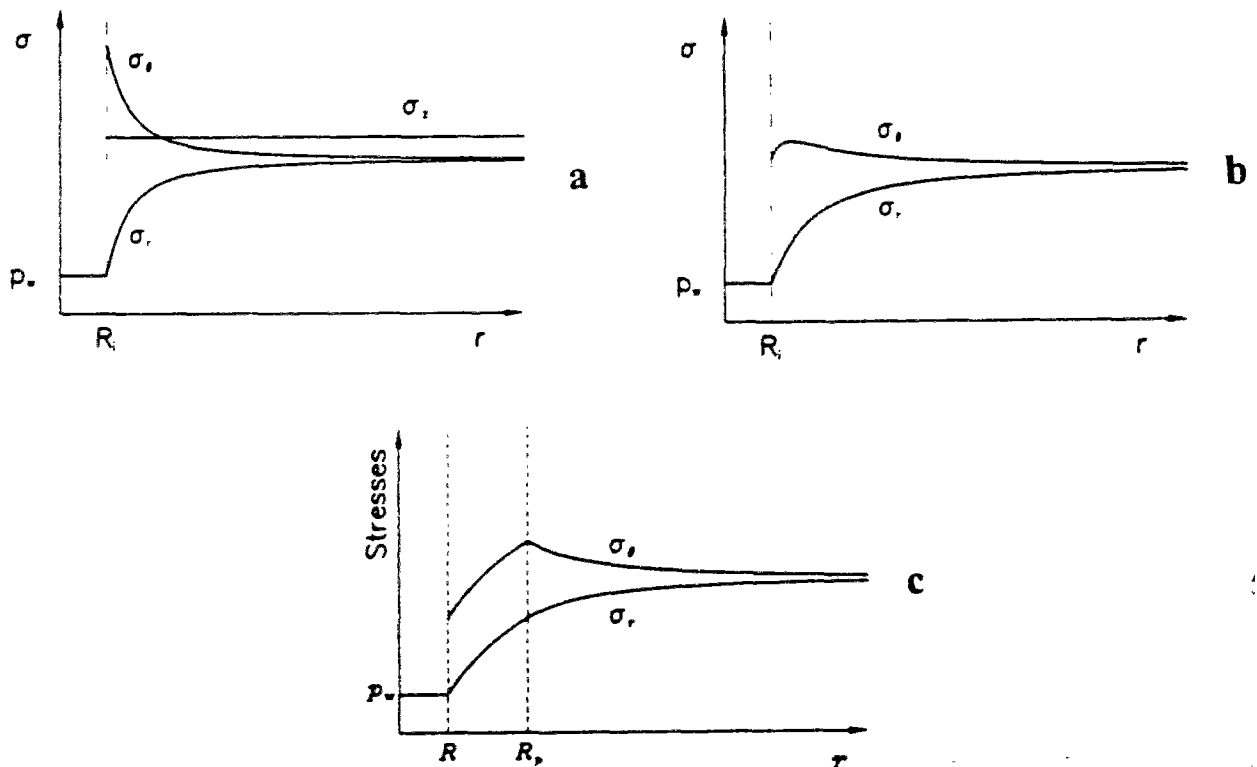


Figure 1.19: Représentation des contraintes autour d'un forage: a) comportement élastique linéaire, b) comportement élastique non-linéaire, c) comportement élastoplastique

### I.4.2 Analyse en bifurcation d'un puits profond

Observée depuis longtemps, l'instabilité des forages profonds est depuis une décennie l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales visant à comprendre les mécanismes de rupture en paroi de forage pour mieux lutter contre les phénomènes d'ovalisation ou d'exfoliation de forages. La rupture conduit en général à une détérioration progressive du forage, et est attribuée à l'existence d'un déviateur des contraintes assez important qui agit à grande profondeur. Comme le soulignent Morita et al. [1996], ce n'est pas le déviateur des contraintes seul qui est à l'origine des instabilités de paroi, mais également la température et l'écoulement du fluide saturant la roche réservoir. De façon à mieux rendre compte des phénomènes d'instabilité de forage, de nombreux modèles théoriques ont été développés depuis une dizaine d'années et c'est sans doute celui développé par Zheng et Cook [1989], qui décrit le mieux la rupture en paroi de forage.

La démarche adoptée pour étudier l'instabilité d'un forage dans le cadre de la théorie de la bifurcation consiste à sélectionner les équations constitutives les mieux adaptées pour décrire le comportement du matériau étudié, à calculer, en considérant ces équations, le champ de contraintes qui règne à proximité de la cavité et à chercher les conditions d'apparition d'un mode de bifurcation pour le problème aux limites considéré. Celui-ci peut être soit un mode de localisation des déformations en bandes de cisaillement à la paroi ou un mode d'instabilité de surface par flambement de la paroi (figure 1.20).

L'instabilité de surface telle qu'elle a été définie par Vardoulakis [1984] correspond, quant à elle, à une ondulation de surface au nombre d'onde infini. Elle ne concerne qu'une couronne de matériau d'épaisseur infinitésimale devant le rayon de la cavité en question, elle n'est donc pas affectée par le gradient de contrainte autour du forage et tend à activer des microfissures latentes, parallèles à la cavité considérée. Vardoulakis et al [1988] et Sulem [1987] ont été parmi les premiers à envisager les instabilités de surface comme étant à l'origine des phénomènes de localisation de la déformation en bande de cisaillement.

Afin de conforter son hypothèse, Vardoulakis a examiné l'éventuelle occurrence d'une bifurcation autour d'un puits foré dans différents matériaux: calcaire, grès et sable. En procédant ainsi il a pu mettre en évidence les fortes interactions qui existent entre le modèle de comportement choisi pour décrire le matériau considéré et le mode de bifurcation critique.



Ses études sur le sable ont été conduites en utilisant un modèle élastoplastique non standard, celles sur le calcaire ont été réalisées en collaboration avec Sulem et Guenot [1988], avec un modèle plastique rigide pour matériau dilatant sensible au confinement et enfin, celles sur le grès ont été menées avec Papanastasiou [1989], en utilisant un modèle de Cosserat auquel se sont également intéressés Tronvoll et al [1993].

Dans leurs articles [1988] et [1989], Papanastasiou et Vardoulakis se sont attachés à illustrer l'influence de la loi de comportement sélectionnée sur le mode de bifurcation qui selon leurs prédictions est le mode le plus critique. En utilisant tout d'abord, un modèle rigide plastique pour matériau cohérent, frottant et incompressible, ils ont montré que dans les matériaux dont l'angle de frottement est faible, l'instabilité de surface est d'après leurs calculs prédictifs, le premier mode de bifurcation à être déclenché et qu'en revanche, dans les matériaux à angle de frottement élevé, la rupture se localise en bandes de cisaillement.

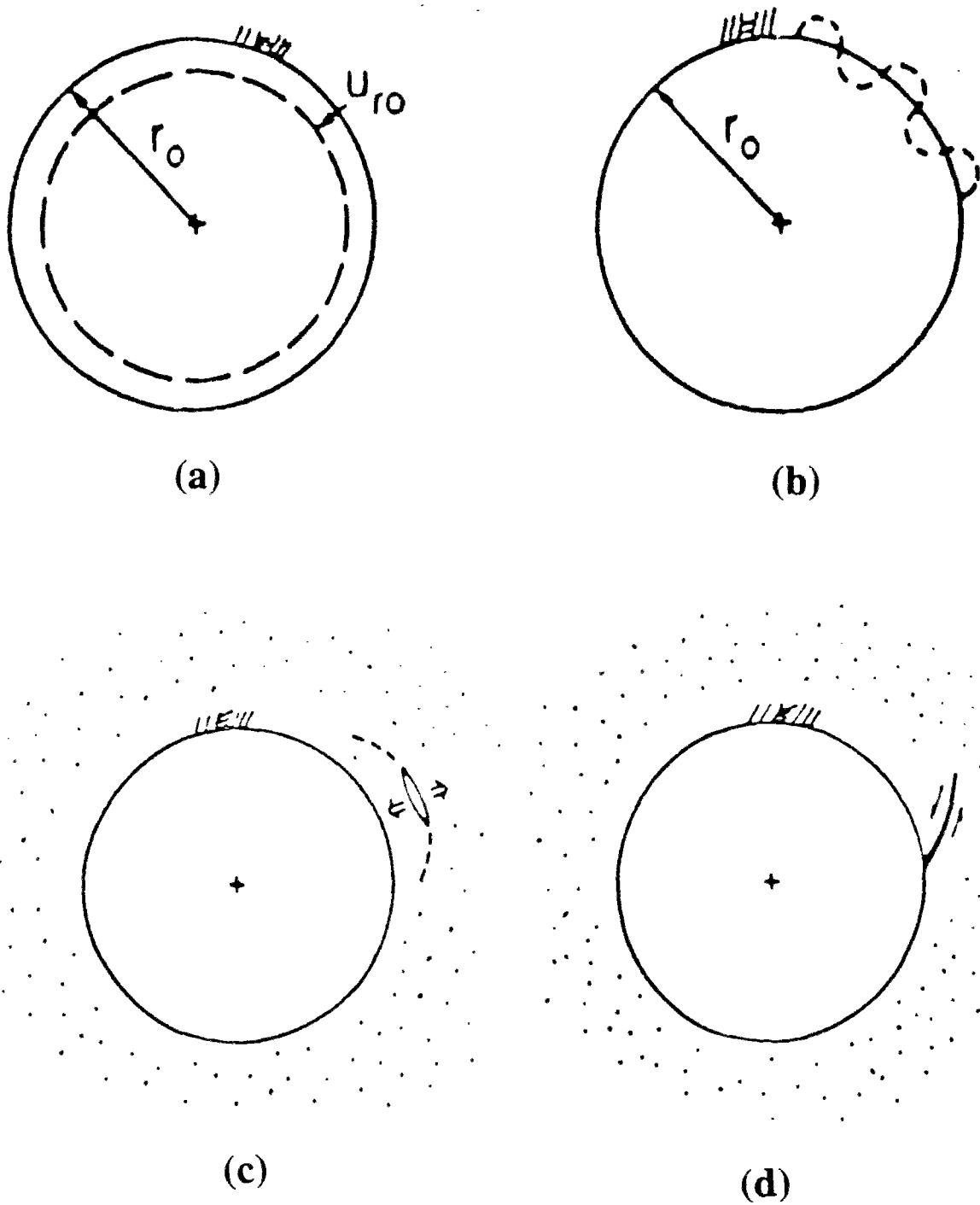


Figure 1.20: Modes de déformation et de rupture d'un puits: (a) convergence, (b) gauchissement, (c) exfoliation, (d) formation de bandes de cisaillement. (Vardoulakis et al [1988])



## Chapitre II

# Modélisation du comportement du grès de Wildmoor

### II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle constitutif capable de décrire le comportement du grès rouge de Wildmoor. Bien que le modèle choisi reste aussi simple que possible, nous avons introduit des caractéristiques importantes du comportement du grès, telles que la dépendance en pression, la dilatance, le caractère frottant et cohésif, le comportement radoucissant et durcissant. Le caractère frottant et cohésif des roches granulaires est modélisé dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité. L'étalonnage du modèle est basé sur l'évaluation des propriétés élastiques et plastiques de la roche à partir des données expérimentales.

Le point de départ est l'évaluation du module élastique à partir des cycles de charge-décharge des essais triaxiaux. Cette analyse montre que le module élastique du grès rouge de Wildmoor n'est pas constant (chapitre III). Nous observons un durcissement (le module élastique augmente avec les contraintes), et un endommagement du matériau (le module d'Young diminue lorsque les déformations plastiques augmentent, tandis que le coefficient de Poisson augmente simultanément).

L'intensité du déviateur des déformations plastiques est une mesure macroscopique, du glissement plastique, qui se produit à travers les microfissures et les interfaces entre grains. Passé l'état d'écoulement initial, le frottement est mobilisé en tant que fonction du déviateur des déformations plastiques et atteint la saturation au pic. Par ailleurs, en cours de déformation de nouvelles microfissures peuvent apparaître. Par conséquent, un modèle de plasticité avec écrouissage positif en frottement et radoucissant en cohésion, a été calé sur les données expérimentales. L'analyse de l'évolution des angles de frottement et de dilatance, avec l'augmentation des déformations plastiques, montre une dépendance en pression du grès rouge de Wildmoor. Par conséquent nous avons pris en considération un modèle de comportement hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire (modèle complet) pour le grès de Wildmoor.

Dans ce chapitre nous présentons un profil général de la théorie de l'écoulement plastique pour les roches en mettant l'accent sur les modèles classiques de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager. Le caractère non linéaire du grès de Wildmoor (influence de l'état de contraintes sur les paramètres élastiques et plastiques) est également modélisé. Le modèle de comportement que nous présentons dans ce chapitre tient également compte de l'endommagement isotrope du grès de Wildmoor.

## II.2 Comportement hyperélastique du grès de Wildmoor

### II.2.1 Elasticité linéaire

Le tenseur des contraintes ainsi que sa forme incrémentale se décomposent en une partie déviatorique et une partie sphérique

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3 = s_{ij} + p \delta_{ij} \quad 2.2.1$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{s}_{ij} + \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} / 3 = \dot{s}_{ij} + \dot{p} \delta_{ij} \quad 2.2.2$$

D'autre part, le tenseur des vitesses de déformation se décompose en une partie élastique et une partie plastique

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad 2.2.3$$

On peut également décomposer le tenseur des vitesses de déformation en une partie déviatorique et une partie sphérique

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} / 3 \quad 2.2.4$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)} = \dot{e}_{ij}^{(\alpha)} + \dot{\varepsilon}_{kk}^{(\alpha)} \delta_{ij} / 3 \quad ; \quad (\alpha=e,p) \quad 2.2.5$$

Le tenseur des vitesses de déformation élastique est relié à l'incrément du tenseur des contraintes par les équations de l'élasticité

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad ; \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{K} p \quad 2.2.6$$

où  $C_{ijkl}^e$  est le tenseur d'élasticité; pour un modèle élastique isotrope linéaire, le tenseur d'élasticité est donné par

$$C_{ijkl}^e = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad 2.2.7$$

où G, K et  $\nu$  représentent respectivement le module élastique de cisaillement, le module élastique de compression et le coefficient de poisson.

## II.2.2 Elasticité non linéaire ou hyperélasticité

L'élasticité du grès rouge de Wildmoor dépend des contraintes. Cette propriété est communément observée pour les grès et plus généralement pour les matériaux granulaires (Santarelli et al [1986]). Dans la littérature il existe plusieurs tentatives de modélisation du

comportement élastique dépendant des contraintes pour les géomatériaux (Loret [1985], Lade et Nelson [1987] et Molenkamp [1988]).

A partir des données sur les essais triaxiaux effectués par IKU sur le grès rouge de Wildmoor, nous avons déterminé les modules élastiques du matériau (chapitre III), on a ainsi observé une dépendance du module élastique de cisaillement par rapport à la pression moyenne  $p = I_1\sigma/3 = \sigma_{kk}/3$ , et à l'intensité du déviatorique  $T = \sqrt{J_{2s}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2}$ .

$$G = G(p, T)$$

2.2.8

Ce type de dépendance par rapport aux contraintes du module élastique de cisaillement est lié à une concavité initiale de la courbe contraintes-déformations, ce qui peut être attribué à la fermeture des pores de la roche. Dans le but de rendre compte de cette dépendance en contraintes des paramètres élastiques, nous supposons que le comportement de la roche est hyperélastique, nous en déduisons la fonction de densité d'énergie complémentaire correspondante (figure 2.1)

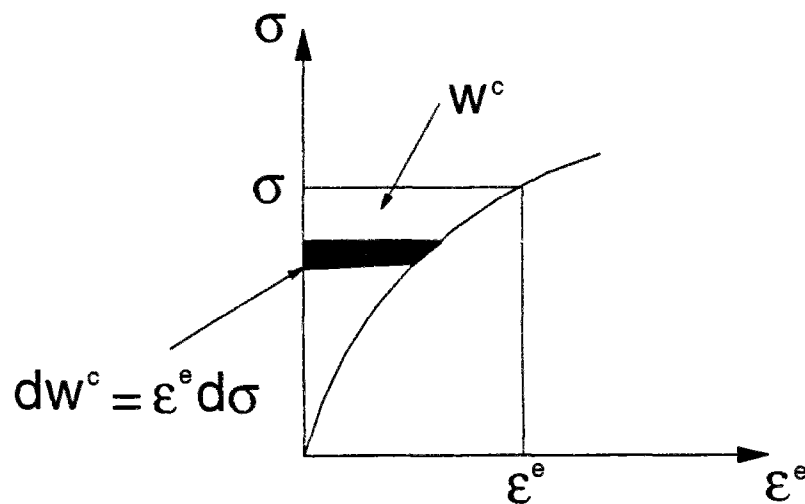


Figure 2.1: Définition de la fonction de densité d'énergie complémentaire  $w^c$  (Sulem et al [1995a])

$$w^c(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \epsilon_{ij}^e d\sigma_{ij}$$

2.2.9

$w^c$  est donc une fonction potentiel des contraintes pour les déformations élastiques

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{\partial w^c}{\partial \sigma_{ij}} \quad 2.2.10$$

L'existence de cette densité d'énergie complémentaire assure qu'il n'y a ni production ni dissipation d'énergie tant que le matériau a un comportement élastique.

En élasticité isotrope, la densité d'énergie complémentaire est une fonction des trois invariants du tenseur des contraintes

$$w^c = w^c(I_{1\sigma}, J_{2s}, J_{3s}) \quad 2.2.11$$

$$I_{1\sigma} = \sigma_{kk} \quad ; \quad J_{2s} = s_{ij}s_{ji}/2 \quad ; \quad J_{3s} = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3$$

ce qui donne, grâce à l'équation 2.2.8, une relation générale pour l'élasticité non linéaire (Chen [1988])

$$\varepsilon_{ij} = a_1 \delta_{ij} + a_2 \sigma_{ij} + a_3 \sigma_{ik} \sigma_{kj} \quad 2.2.12$$

où les coefficients  $a_i$  sont des fonctions des invariants du tenseur des contraintes

$$a_i = a_i(I_{1\sigma}, J_{2s}, J_{3s}) \quad 2.2.13$$

Habituellement, il n'est pas possible de déterminer l'influence du troisième invariant du tenseur des contraintes, ce qui est dû au manque de données expérimentales, nous avons donc les relations suivantes

$$a_1 = \frac{I_{1\sigma}}{3K_s} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{2G_s} \quad ; \quad a_3 = 0 \quad 2.2.14$$



où  $K_s$  et  $G_s$  sont respectivement les modules élastiques de compression et de cisaillement sécants

$$K_s = K_s(I_{1\sigma}, J_{2s}) \quad ; \quad G_s = G_s(I_{1\sigma}, J_{2s}) \quad 2.2.15$$

En décomposant le tenseur des déformations élastiques en une partie déviatorique et une partie sphérique nous obtenons

$$\varepsilon_{ij}^e = e_{ij}^e + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad 2.2.16$$

A partir des équations 2.2.12 et 2.2.13 nous pouvons tirer les relations suivantes

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{p}{K_s} \quad ; \quad e_{ij}^e = \frac{s_{ij}}{2G_s} \quad 2.2.17$$

Ce qui nous donne pour la densité d'énergie complémentaire

$$w^c = \int_0^p \frac{p d(p^2)}{2K_s} + \int_0^T \frac{T d(T^2)}{2G_s} \quad 2.2.18$$

Pour simplifier nous supposons le coefficient de Poisson indépendant des contraintes; et les modules élastiques, de compression et de cisaillement, sécants proportionnels au module d'Young sécant

$$K_s = \alpha G_s \quad ; \quad \alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad 2.2.19$$

$$E_s = 2G_s(1+\nu) = 3K_s(1-2\nu) \quad 2.2.20$$

Ainsi l'équation 2.2.18 nous permet d'introduire la notion de contrainte élastique équivalente, qui combine les effets d'une contrainte normale et d'une contrainte de cisaillement, et que l'on

peut écrire sous la forme suivante

$$\sigma_e = \sqrt{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2} \quad 2.2.21$$

Nous noterons que pour un matériau élastique incompressible  $\nu=1/2$  et  $K_s=\infty$ , et que la contrainte élastique équivalente est proportionnelle à l'intensité du déviateur des contraintes  $\sigma_e = \sqrt{3}T$ .

A partir des équations 2.2.18 et 2.2.21 nous obtenons

$$w^c = \int_0^{\sigma_e} \frac{\sigma_e d\sigma_e}{G_s} \quad 2.2.22$$

En partant des équations 2.2.17, les relations incrémentales entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations élastiques nous donnent

$$\dot{s}_{ij} = 2G_s \dot{\epsilon}_{ij} + s_{ij} \frac{\dot{G}_s}{G_s} \quad ; \quad \dot{p} = K_s \dot{\epsilon}_{kk} + p \frac{\dot{K}_s}{K_s} \quad 2.2.23$$

Avec  $3K_s = E_s/(1-2\nu)$ ,  $2G_s = E_s/(1+\nu)$ , la dépendance du module d'Young sécant par rapport aux contraintes est donnée par les relations suivantes

$$\dot{G}_s = \frac{\partial G_s}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial G_s}{\partial T} \dot{T} \quad ; \quad \dot{p} = \frac{1}{3} \dot{\sigma}_{kk} \quad ; \quad \dot{T} = \frac{s_{ij} \dot{s}_{ji}}{2T} \quad 2.2.24$$

on peut écrire les équations incrémentales de l'hyperélasticité

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{ijkl} \quad 2.2.25$$

$$C_{ijkl}^e = G_s \left( \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} + 2(1+\nu) \frac{\xi}{1-\xi} \frac{\sigma_{ij}\sigma_{kl}}{\sigma_e^2} \right) \quad 2.2.26$$

$$\xi = \frac{\sigma_e dG_s}{G_s d\sigma_e} \quad 2.2.27$$

L'analyse de stabilité du modèle élastique non-linéaire est présentée dans l'annexe C.

## II.3 Comportement plastique du grès de Wildmoor

### II.3.1 Plasticité non-associative de Mróz-Mandel

Les déformations plastiques sont couramment associées à un potentiel plastique (fonction isotrope du tenseur des contraintes) dans l'espace des contraintes (figure 2.2)

$$Q = Q(\sigma_{ij}, \Psi) \quad 2.3.1$$

$\Psi$  étant un paramètre d'écrouissage (lié à la déformation plastique accumulée). La loi de l'écoulement plastique s'écrit

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\Psi} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad ; \quad \dot{\Psi} \geq 0 \quad 2.3.2$$

La loi d'écoulement ci-dessus est une loi 'coaxiale', c'est à dire que les axes principaux de la vitesse de déformation plastique coïncident avec les axes principaux des contraintes. Notons également que l'inégalité  $\dot{\Psi} \geq 0$  est essentielle pour l'élastoplasticité, et définit le caractère d'irréversibilité des déformations plastiques.

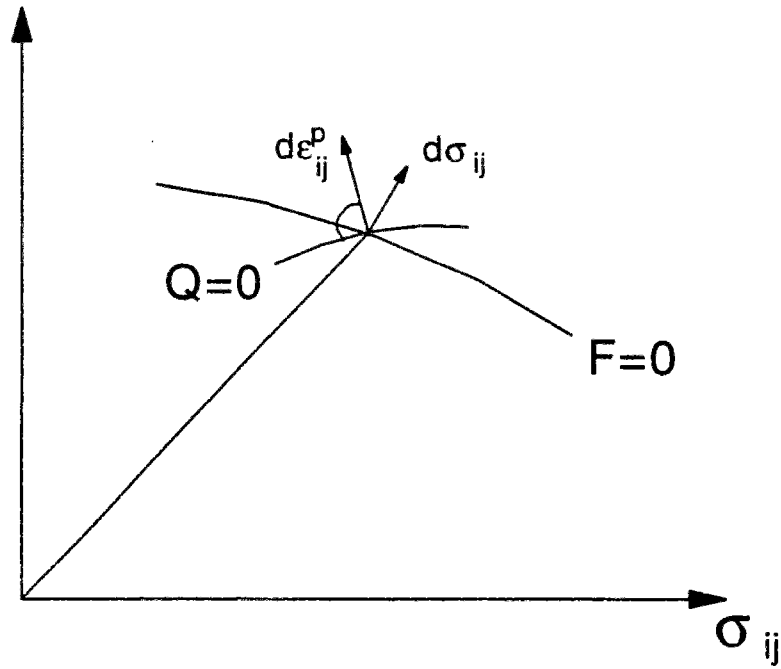


Figure 2.2: Critère de plasticité et potentiel plastique dans l'espace des contraintes (Sulem et al [1995a])

La vitesse de déformation volumique plastique  $\dot{v}^p$  et l'intensité  $\dot{g}^p$  du déviateur de la vitesse de déformation plastique sont définies respectivement comme le premier invariant et le second invariant déviatorique de la vitesse de déformation plastique

$$\dot{v}^p = I_{1\dot{\epsilon}^p} = \dot{\epsilon}_{kk} \quad ; \quad \dot{g}^p = 2\sqrt{J_{2\dot{\epsilon}^p}} = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} \geq 0 \quad 2.3.3$$

A partir l'équation 2.3.2 nous obtenons les relations suivantes

$$\dot{v}^p = Q_v \dot{\Psi} \quad ; \quad Q_v = 3 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kk}} \quad 2.3.4$$

$$\dot{g}^p = Q_g \dot{\Psi} \quad ; \quad Q_g = \sqrt{2 \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kk}} \delta_{ij} \right) \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kk}} \delta_{ij} \right)} \quad 2.3.5$$

Nous noterons que dans la loi d'écoulement 2.3.2  $\dot{\Psi}$  joue le rôle d'un multiplicateur plastique, c'est à dire que la loi d'écoulement 2.3.2 rend unidimensionnel le problème de la plasticité, tant que seule la direction de la vitesse de déformation et non son amplitude est déterminée. Cette indétermination est levée en ayant recours au concept de la surface de plasticité dans l'espace des contraintes

$$F=F(\sigma_{ij}, \Psi) \quad 2.3.6$$

La vitesse de déformation plastique est générée lorsque le critère de plasticité et sa dérivée s'annulent

$$F=0 \quad ; \quad \dot{F}=0 \quad \dot{\Psi}>0 \quad 2.3.7$$

Ce qui permet d'écrire la condition de consistance de Prager pour la théorie de l'écoulement plastique

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0 \quad 2.3.8$$

La condition de consistance de Prager conduit à une équation algébrique pour le multiplicateur plastique, de la forme suivante

$$\dot{\Psi} = \frac{\langle \dot{\Psi} \rangle}{H} B_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad 2.3.9$$

avec

$$\langle \dot{\Psi} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } F=0 \text{ et } B_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} > 0 \\ 0 & \text{si } F < 0 \text{ ou } F=0 \text{ et } B_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \leq 0 \end{cases} \quad 2.3.10$$

et

$$B_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \quad 2.3.11$$

Dans l'équation 2.3.9 H est le module de plasticité

$$H = H_t + H_0 > 0 \quad 2.3.12$$

avec

$$H_0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klmn}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \quad ; \quad H_t = - \frac{\partial F}{\partial \Psi} \quad 2.3.13$$

On en déduit le tenseur de rigidité plastique (Mróz [1963])

$$C_{ijkl}^p = \frac{\langle 1 \rangle}{H} C_{mnij}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}^e \quad 2.3.14$$

Lorsque l'on prend le critère de plasticité égal au potentiel plastique ( $F=Q$ ), on dit que la loi d'écoulement 2.3.2 est associative. Dans ce cas la vitesse de déformation plastique est perpendiculaire au critère de plasticité dans l'espace des contraintes, ce qui correspond à la loi de normalité dans la théorie de la plasticité. On remarquera que pour une loi d'écoulement associative le tenseur de rigidité plastique satisfait les conditions de symétrie suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \rightarrow C_{ijkl}^{ep} = C_{klij}^{ep} \quad 2.3.15$$

## II.3.2 Modèles constitutifs pour le grès de Wildmoor

### II.3.2.1 Quelques définitions

Le premier invariant du tenseur des contraintes et la pression moyenne sont tels que

$$I_1 = \sigma_{kk} \quad ; \quad p = \sigma_{kk}/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad 2.3.16$$

avec  $p < 0$  en compression.

Le second invariant déviatorique et l'intensité du déviatorique s'écrivent

$$J_{2s} = s_{ij}s_{ij}/2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)/2 \quad ; \quad T = \sqrt{J_{2s}} \quad 2.3.17$$

Le troisième invariant déviatorique est tel que

$$J_{3s} = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3 = (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3)/3 \quad 2.3.18$$

L'angle de similarité  $\alpha_{s0}$  est défini par la relation suivante

$$\cos(3\alpha_{s0}) = \frac{3\sqrt{3} J_{3s}}{2 J_{2s}^{3/2}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha_{s0} \leq \pi/3 \quad 2.3.19$$

Sur la figure 2.3 nous avons représenté l'orientation du déviateur des contraintes dans le plan déviatorique et on remarque qu'en compression on a  $\alpha_{s0} = \pi/3$  alors qu'en extension  $\alpha_{s0} = 0$

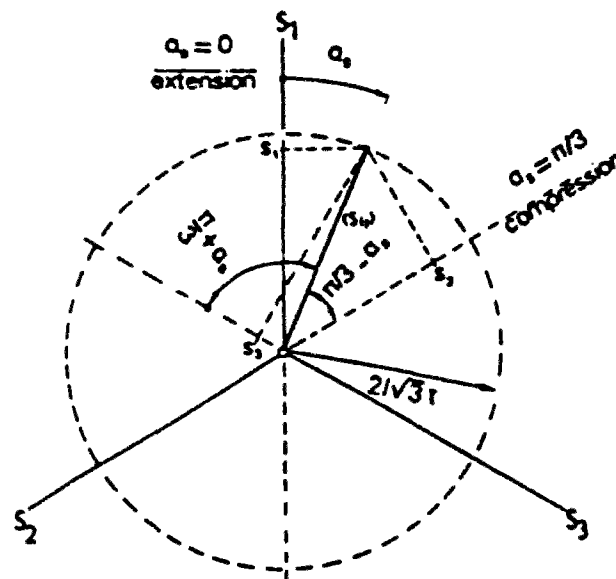
Le coefficient de frottement mobilisé  $f$  et la cohésion mobilisée  $c$  sont respectivement donnés par les relations suivantes

$$f = \tan(\phi_\sigma) = T/(q-p) \quad ; \quad c = qf \quad 2.3.20$$

où  $\phi_\sigma$  est l'angle d'inclinaison des contraintes et  $q$  est liée à la cohésion  $c$  du matériau (figure 2.4).

En général, les coefficients de frottement et de cohésion sont des fonctions du paramètre de durcissement plastique  $\Psi$ . Si  $f$  et  $c$  sont des fonctions croissantes du paramètre  $\Psi$  on a un phénomène de durcissement du matériau, sinon il se produit un radoucissement de ce même matériau.

Pour représenter le mieux possible les caractères frottant, cohésif et dilatant du grès de Wildmoor, nous avons choisis deux modèles de comportement plastique, les modèles de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager. En particulier pour le modèle de Drucker-Prager, il n'y a pas de dépendance du coefficient de frottement  $f$  par rapport à  $\alpha_{s0}$ ; il en résulte une représentation sous forme de cône dans l'espace des contraintes et de cercle dans le plan déviatorique. D'autre part pour le modèle de Mohr-Coulomb, la dépendance par rapport à  $\alpha_{s0}$  est telle que le critère de plasticité est indépendant de la contrainte principale intermédiaire, il en résulte une représentation sous forme de pyramide hexagonale dans l'espace des contraintes et d'hexagone dans le plan déviatorique (figure 2.5).

Figure 2.3: Orientation de  $\alpha_s$  dans le plan déviatorique



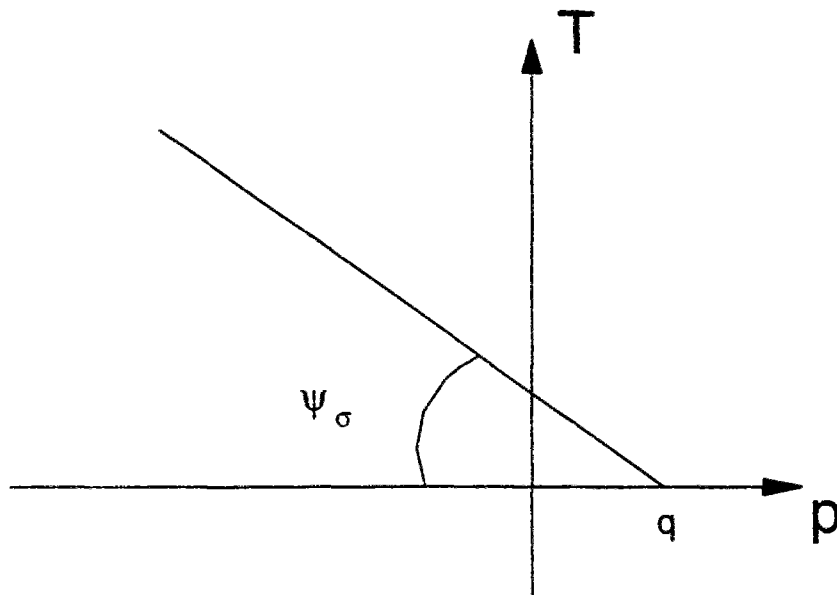


figure 2.4: Représentation de  $\phi_\sigma$  dans le plan  $(\tau, p)$

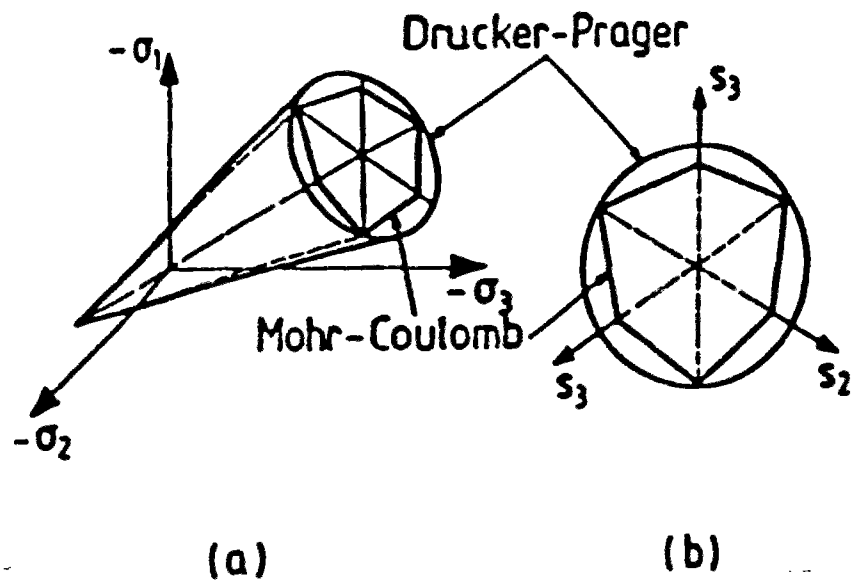


Figure 2.5: Représentation des modèles de Drucker-Prager et Mohr-Coulomb: (a) espace des contraintes principal, (b) plan déviatorique (Sulem et Vardoulakis [1993])

### II.3.2.2 Critère de plasticité de Drucker-Prager

Le critère de plasticité de Drucker-Prager [1952] est tel que

$$F = \sqrt{J_{2s}} - f(q - I_{1\sigma}/3) \quad 2.3.21$$

Dans ce cas nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{m_{ij}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} f \delta_{ij} \quad ; \quad m_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_{2s}}} \quad 2.3.22$$

### II.3.2.3 Critère de plasticité de Mohr-Coulomb

$$F = \sqrt{J_{2s}} \left[ \sin(\alpha_{s0} + \pi/3) + \cos(\alpha_{s0} + \pi/3) \frac{\sin \phi_m}{\sqrt{3}} \right] - (q - I_{1\sigma}/3) \sin \phi_m \quad 2.3.23$$

où  $\phi_m$  est l'angle de frottement mobilisé de Mohr Coulomb (figure 2.6).

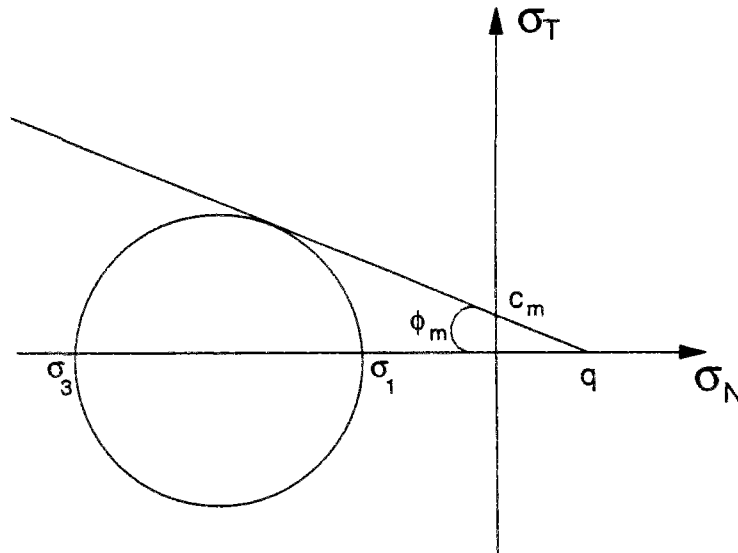


Figure 2.6: Représentation de  $\phi_m$  dans le plan de Mohr

Le gradient du critère de plasticité dans l'espace des contraintes est (Chen et Han [1988])

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = B_0 \delta_{ij} + B_1 s_{ij} + B_2 S_{ij} \quad ; \quad S_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_{2s} \delta_{ij} \quad 2.3.24$$

avec

$$B_0 = \sin \phi_m / 3 \quad 2.3.25$$

$$B_1 = \begin{cases} (3 + \sin \phi_m) / (4\sqrt{3}\sqrt{J_{2s}}) \text{ pour } \alpha_{s0} = 0 \\ (\sin(\alpha_{s0} + \pi/3) / (2\sqrt{J_{2s}})) \{ (1 + \cot(\alpha_{s0} + \pi/3) \cot \alpha_{s0}) \\ + \sin \phi_m (\cot(\alpha_{s0} + \pi/3) - \cot 3\alpha_{s0}) / \sqrt{3} \} \text{ pour } 0 < \alpha_{s0} < \pi/3 \\ (3 - \sin \phi_m) / (4\sqrt{3}\sqrt{J_{2s}}) \text{ pour } \alpha_{s0} = \pi/3 \end{cases} \quad 2.3.26$$

$$B_2 = \begin{cases} 0 \text{ pour } \alpha_{s0} = 0 \\ [\sin(\alpha_{s0} + \pi/3) \sin \phi_m - \sqrt{3} \cos(\alpha_{s0} + \pi/3)] \\ / (2J_{2s} \sin(3\alpha_{s0})) \text{ pour } 0 < \alpha_{s0} < \pi/3 \\ 0 \text{ pour } \alpha_{s0} = \pi/3 \end{cases} \quad 2.3.27$$

#### II.3.2.4 Potentiel plastique de Drucker-Prager

Le potentiel plastique de Drucker-Prager est tel que

$$Q = \sqrt{J_{2s}} + d \frac{I_{1\sigma}}{3} \quad 2.3.28$$

où d coefficient de dilatance mobilisé. Dans ce cas le gradient du potentiel plastique est

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{m_{ij}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} d \delta_{ij} \quad ; \quad m_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_{2s}}} \quad 2.3.29$$

alors que les facteurs de conversion, définis par les équations 2.3.4 et 2.3.5, sont

$$Q_v=d \quad ; \quad Q_g=1 \quad 2.3.30$$

### II.3.2.5 Potentiel plastique de Mohr-Coulomb

$$Q=\sqrt{J_{2s}} \left[ \sin(\alpha_{s0}+\pi/3)+\cos(\alpha_{s0}+\pi/3)\frac{\sin\psi_m}{\sqrt{3}} \right] +(I_{1\sigma}/3)\sin\psi_m \quad 2.3.31$$

où  $\psi_m$  est l'angle de dilatance mobilisé de Mohr. Le calcul du gradient du potentiel plastique, dans l'espace des contraintes, donne des résultats analogues à ceux obtenus dans les équations 2.2.38 à 2.2.41, où  $\sin\phi_m$  est remplacé par  $\sin\psi_m$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}=Q_0\delta_{ij}+Q_1s_{ij}+Q_2S_{ij} \quad 2.3.32$$

## II.4 Endommagement du grès de Wildmoor

### II.4.1 Caractérisation et quantification de l'endommagement anisotrope

L'endommagement est défini comme la détérioration progressive des matériaux sous sollicitation qui conduit à la rupture de l'élément de volume. La nature anisotrope de l'endommagement sous compression triaxiale nous conduit à nous intéresser à l'interprétation des essais de charge-décharge à l'aide de l'équivalence en énergie proposée par Cordebois et Sidoroff [1982]. Cette approche a déjà été mise en oeuvre par certains auteurs comme Pellegrino [1995a] sur le grès de Rothbach ou Haied [1995] sur le grès de Fontainebleau. La mesure de l'endommagement a été généralisée au cas tridimensionnel par Lemaître et Chaboche [1978] qui ont également introduit la notion d'équivalence en déformation utilisée pour évaluer l'endommagement isotrope. Cordebois et Sidoroff [1982] ont proposé une généralisation de la notion de contraintes effectives pour un endommagement anisotrope sous la forme

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} = M(D)\sigma ; D = \frac{S_D}{S} \quad 2.4.1$$

où  $S_D$  est la partie endommagée de la surface résistante  $S$  et  $(S-S_D)$  étant la surface résistante effective.  $M(D)$  est un tenseur symétrique d'ordre 2. En supposant l'équivalence de l'énergie élastique entre le matériau sain soumis à la contrainte effective et le matériau endommagé sollicité par la contrainte usuelle, Sidoroff et Cordebois [1982] montrent que la loi de comportement peut s'écrire dans le repère des sollicitations sous la forme:  $\epsilon = S:\sigma$

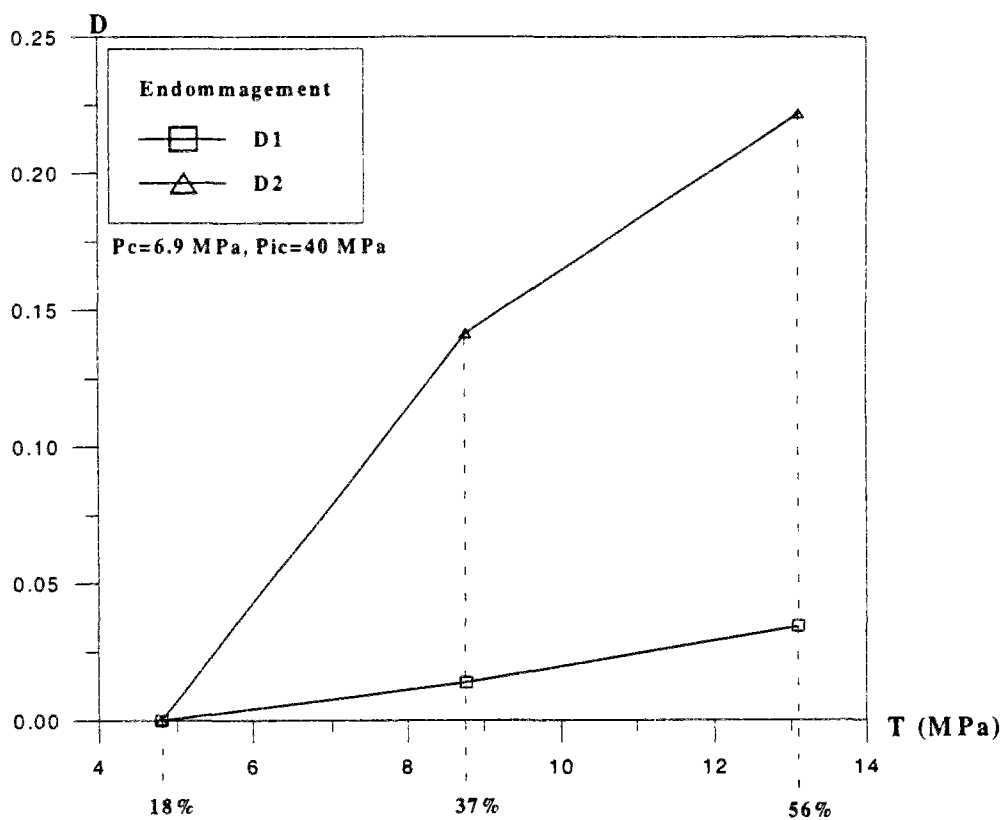
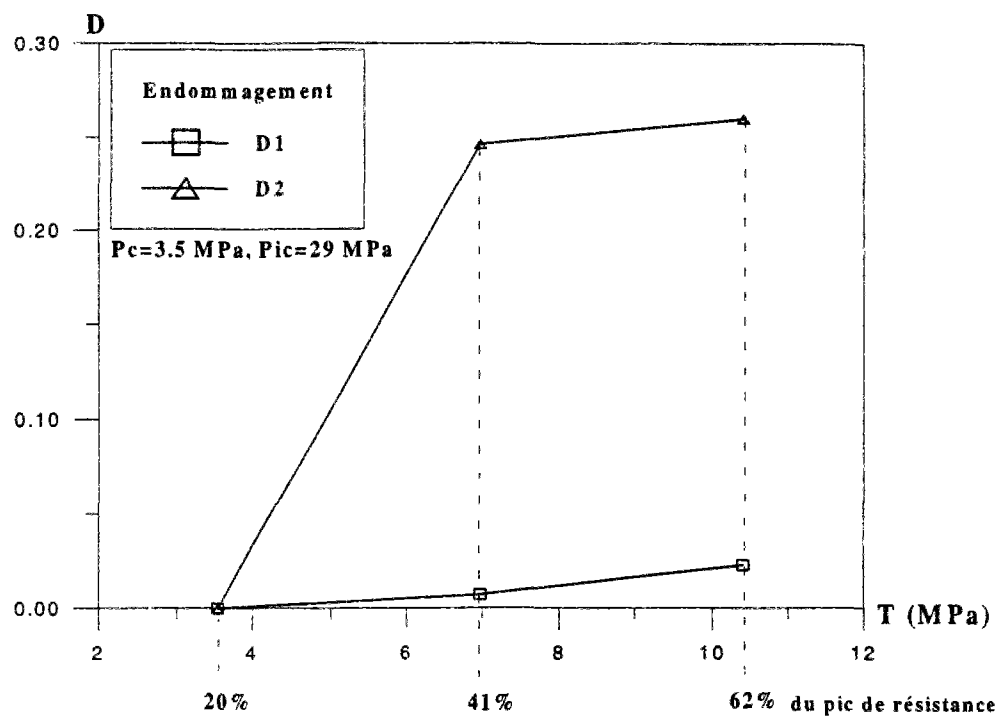
où  $S_{ij}$  est de la forme

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E(1-D_1)^2} & \frac{\nu}{E(1-D_1)(1-D_2)} & \frac{\nu}{E(1-D_1)(1-D_3)} \\ \frac{\nu}{E(1-D_2)(1-D_1)} & \frac{1}{E(1-D_2)^2} & \frac{\nu}{E(1-D_2)(1-D_3)} \\ \frac{\nu}{E(1-D_3)(1-D_1)} & \frac{\nu}{E(1-D_3)(1-D_2)} & \frac{1}{E(1-D_3)^2} \end{bmatrix} \quad 2.4.2$$

$E$  et  $\nu$  étant le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau initialement isotrope. Ce système nous donne les valeurs principales du tenseur d'endommagement

$$D_1 = 1 - \left( \frac{\tilde{E}_1}{E} \right)^{1/2} ; D_2 = 1 - \left( \frac{\tilde{E}_2}{E} \right)^{1/2} ; D_3 = 1 - \left( \frac{\tilde{E}_3}{E} \right)^{1/2} \quad 2.4.3$$

Pour l'essai de compression triaxiale cyclique il serait intéressant d'évaluer l'endommagement axial et radial ( $D_1$ ,  $D_2$ ) à différents cycles de charge-décharge pour différentes pressions de confinement (figure 2.7). Les courbes obtenues montrent que l'endommagement radial  $D_2$  augmente sensiblement avec la déformation, alors que l'endommagement axial reste faible. Pour les confinements à 6.9 ou 10.3 Mpa, on remarque que l'augmentation de  $D_2$  est progressive; par contre pour le confinement à 3.5 Mpa l'endommagement radial se produit essentiellement en début de déformation. Cela doit être lié au phénomène de fermeture des microfissures dues à l'augmentation de la pression de confinement.



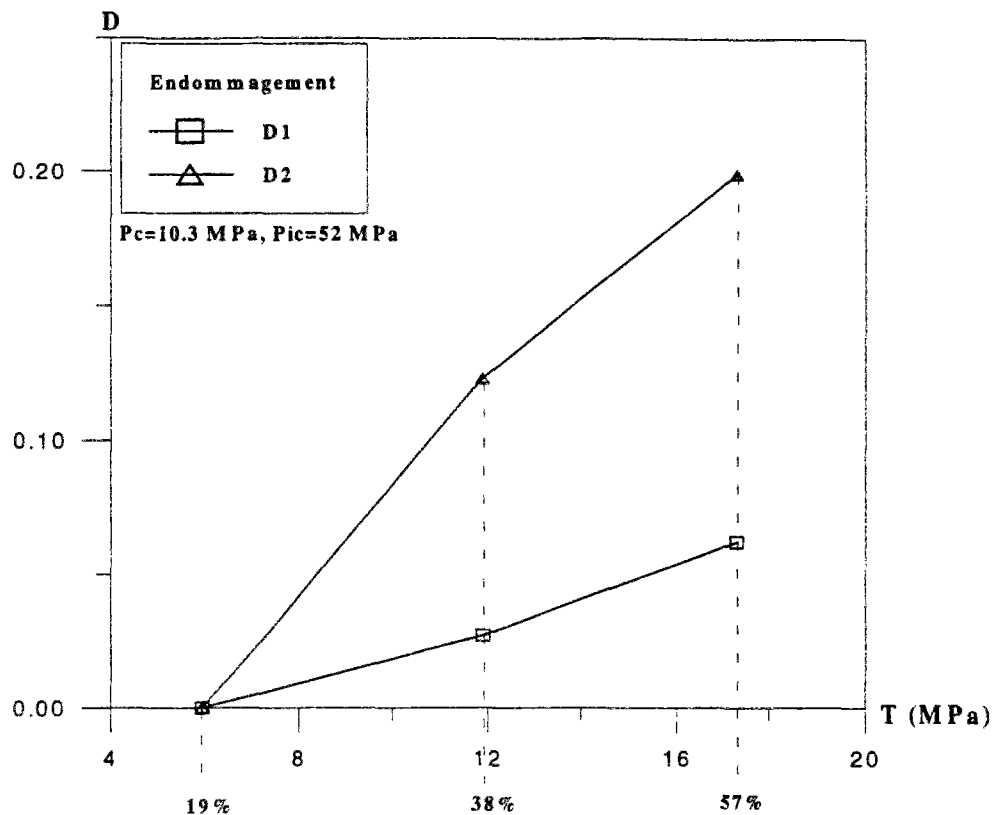


Figure 2.7: Représentation de l'endommagement radial et axial ( $D_2$ ,  $D_1$ ) en fonction de l'intensité du déviateur des contraintes à différentes pressions de confinement

Dans la suite nous négligeons l'endommagement anisotrope et nous considérons exclusivement un endommagement isotrope afin de garder l'isotropie du modèle de comportement. Le grès rouge de Wildmoor fait apparaître des déformations plastiques même pour des niveaux faibles de contrainte (voir figure 3.7 représentant la surface de plasticité pour  $g^p=0$ ). On choisit dans la suite la déformation plastique comme paramètre d'endommagement.

## II.4.2 Endommagement isotrope

Les modules élastiques du grès sont influencés par deux phénomènes: La fermeture des microfissures préexistantes dans la roche, ce qui se traduit par l'augmentation du module de cisaillement sécant pour les premières boucles de charge-décharge. Par la suite les

déformations de la roche provoquent un phénomène d'endommagement, c'est à dire la formation de nouvelles microfissures; ce qui se traduit par la diminution du module de cisaillement sécant pour les dernières boucles de charge-décharge. C'est ce phénomène d'endommagement ductile isotrope dont nous tenons compte dans notre modèle de comportement pour le grès de Wildmoor; cela en considérant le module élastique de cisaillement et le coefficient de Poisson comme dépendants de l'intensité du déviateur de déformation plastique  $g^p$ .

$$G_s = G^*(p, T) \eta(g^p) \quad ; \quad \nu = \nu(g^p) \quad 2.4.4$$

où  $\eta(g^p)$  est appelée fonction d'endommagement (Lemaître [1990]).

## II.5 Couplage hyperélasto-plasticité et endommagement

Le couplage entre l'élasticité non-linéaire, l'endommagement isotrope et la théorie de l'écoulement plastique avec critère de plasticité et potentiel plastique non-linéaires, donne les équations incrémentales constitutives suivantes

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{epd} \dot{\epsilon}_{kl} \quad 2.5.1$$

$$C_{ijkl}^{epd} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^d \quad 2.5.2$$

où le tenseur d'hyperélasticité  $C_{ijkl}^e$  est donné par l'équation 2.2.26, le tenseur de plasticité est donné par l'équation 2.3.14 et le tenseur d'endommagement isotrope est tel que (annexe D)

$$C_{ijkl}^d = \frac{\langle \tau \rangle}{H} E_{ij} Q_g B_{kl} \quad 2.5.3$$



Le couplage entre hyperélasto-plasticité et endommagement affecte également le module de plasticité  $H$

$$H = H_0 + H_t + \tilde{H} \quad 2.5.4$$

où  $H_0$  et  $H_t$  sont donnés par l'équation 2.3.13 et

$$\tilde{H} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ij} Q_g \quad 2.5.5$$

$B_{kl}$  et  $Q_g$  sont donnés respectivement par les relations 2.3.11 et 2.3.5,  $E_{ij}$  est de la forme

$$E_{ij} = \frac{1}{1-\xi} \left[ \frac{\xi}{\sigma_e^2} \left( T^2 + 3p^2 \frac{2-\nu}{1+\nu} \right) \frac{\partial \nu}{\partial g^p} + \frac{1}{G_s} \frac{\partial G_s}{\partial g^p} \right] \sigma_{ij} + \frac{3p}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \nu}{\partial g^p} \delta_{ij} \quad 2.5.6$$

Les développements de ce calcul sont présentés dans l'annexe D.

## II.6 Conclusion

L'originalité de notre démarche telle qu'elle est présentée dans ce chapitre, réside dans le fait que nous avons présenté un modèle de comportement pour le grès rouge de Wildmoor tenant compte de son caractère hyperélastique (influence de l'état des contraintes sur les paramètres élastiques) et de l'endommagement isotrope ductile (dépendance des paramètres élastiques par rapport à l'intensité du déviateur des déformations plastique  $g^p$ ). Le comportement plastique du grès de Wildmoor, quant à lui, est développé à partir du critère de Mohr-Coulomb et du potentiel de Drucker-Prager non linéaires, tenant compte de la dépendance en pression des paramètres plastiques (angle de frottement, angle de dilatance) de la roche, du caractère écrouissable et radoucissant du matériau, de la phase contractante/dilatante du comportement volumique. Cette dépendance en pression est mise en évidence dans le chapitre III lors de

l'étalonnage de notre modèle de comportement sur les données expérimentales (essais uniaxiaux, triaxiaux en compression et extension).



# Chapitre III

## Etalonnage et validation du modèle constitutif

### III.1 Introduction

L'analyse des données expérimentales, effectuée dans ce chapitre, consiste en la constitution d'une base de données à partir d'essais uniaxiaux et triaxiaux en compression et extension; ces essais ont été réalisés sur des échantillons de grès de Wildmoor secs ou saturés de pétrole par IKU-Norvège, ces essais sont décrits dans un article récent de Papamichos et al [1996b]. La première phase est de déterminer les modules élastiques à partir des cycles de charge-décharge pour les essais de compression triaxiale et uniaxiale. Par la suite le modèle constitutif hyperélastique avec endommagement isotrope et critère de plasticité non-linéaire (**modèle complet**) est étalonné sur les données expérimentales puis validé quant à sa capacité à simuler correctement les courbes efforts-déformations par rapport à un modèle de comportement élastique linéaire et critère de plasticité linéaire (**modèle simplifié**).

### III.2 Etude expérimentale du comportement mécanique de base

#### III.2.1 Identification du grès rouge de Wildmoor

Le grès est une roche constituée principalement de grains de sable plus ou moins bien cimentés (Pough [1972]). Les caractéristiques du grès rouge de Wildmoor sont présentées par

Tronvoll [1993] à partir d'études sur la pétrographie, la minéralogie et la pétrophysique de cette roche. La description pétrographique nous donne des informations sur la texture de la roche, la distribution de la porosité et la taille des grains. L'étude de la pétrophysique consiste à déterminer la perméabilité de la roche et la densité des grains. La minéralogie quant à elle nous renseigne sur la composition du matériau (Quartz, Feldspar, Mica...).

### III.2.1.1 Description pétrographique

Les résultats essentiels obtenus par Tronvoll [1993] et Tronvoll et Fjaer [1994], concernant la distribution de la taille des grains et de la porosité sont les suivants: la taille moyenne des grains est de 100 à 200  $\mu\text{m}$  suivant la technique utilisée, la porosité moyenne est de 25% à 30%. L'étude ayant permis d'aboutir à ces résultats, a été effectuée à partir de l'analyse au MEB d'une fine section de l'échantillon (1.8x1.8-mm). Cependant quelques erreurs peuvent être induites par ce type d'analyse.

- La taille des grains et la porosité sont des grandeurs tridimensionnelles, par contre l'analyse d'une section fine se fait bidimensionnellement. On déduit donc que peu de grains ou de vides seront représentés par leur taille maximale.

- Le système d'analyse des images n'est pas apte à différencier deux grains, du même minéral, ayant un contact très rapproché. Un grand nombre de grains pourraient donc être comptabilisés comme un seul grain.

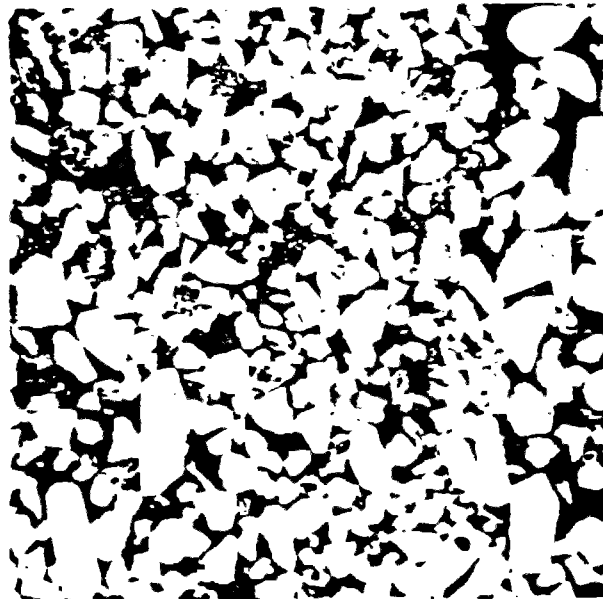
La figure 3.1, d'après Tronvoll [1993], nous montre un exemple de matrice de roche reconstituée obtenue par une analyse d'image au MEB.

### III.2.1.2 Description minéralogique

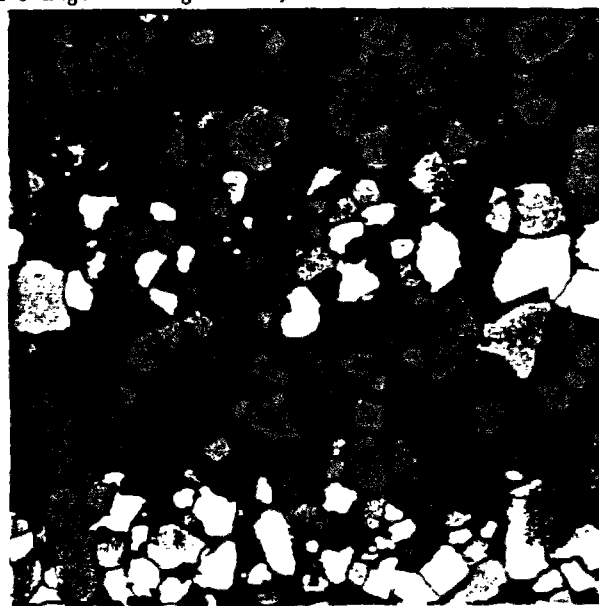
Deux méthodes ont été utilisées en parallèles, par Tronvoll [1993], pour déterminer la minéralogie du matériau. L'analyse de diffraction par rayons X (DRX) de fines ( $<4\mu\text{m}$ ) et d'épaisses fractions d'échantillon de la roche. La description minéralogique du matériau montre la présence d'une grande quantité de Quartz (figure 3.1) dans les épaisses fractions d'échantillon, alors que ce minéral est en quantité limitée dans les fines fractions d'échantillon.

### III.2.1.3 Description pétrophysique

Les mesures de perméabilité à l'air effectuée sur le grès rouge de wildmoor montrent que la perméabilité est strictement liée à la direction de l'écoulement laminaire dans la roche. Pour le grès rouge de Wildmoor lorsque l'écoulement laminaire est normal à la stratification, la perméabilité est entre 66 et 88 (mD); par contre lorsque l'écoulement est parallèle à la stratification la perméabilité varie entre 315 et 647 (mD).



*Backscattered electron micrograph of Red Wildmoor sandstone showing the pore system (black) and the minerals. Light yellow grains are potassium feldspars, dark yellow is quartz and albite while orange is authigenic clay.*



*The same area as in a) showing automatic reconstruction of grain boundaries used as input for grain size distribution. The colours are chosen arbitrarily for each reconstructed grain.*

Figure 3.1: Matrice de roche reconstituée obtenue par une analyse d'image au MEB (Tronvoll [1993])

### III.2.2 Essais de compression triaxiale

Les essais triaxiaux que nous utilisons pour l'étalonnage du modèle constitutif ont été réalisés dans des conditions de lubrification de l'interface entre l'échantillon et les plateaux de chargement afin de diminuer au maximum les frottements parasites, plusieurs auteurs ont souligné l'importance de l'antifretage dans la réalisation d'essais constitutifs (Drescher et Vardoulakis [1982], Pellegrino [1995b]).

Pour chaque niveau de pression de confinement (0, 0.4, 1.4, 3.5, 6.9, 10.3 Mpa), deux essais ont été réalisés afin de tester la reproductibilité des résultats. Les courbes efforts-déformations présentées en annexe (annexe A) plaident en faveur d'une assez bonne reproductibilité des essais.

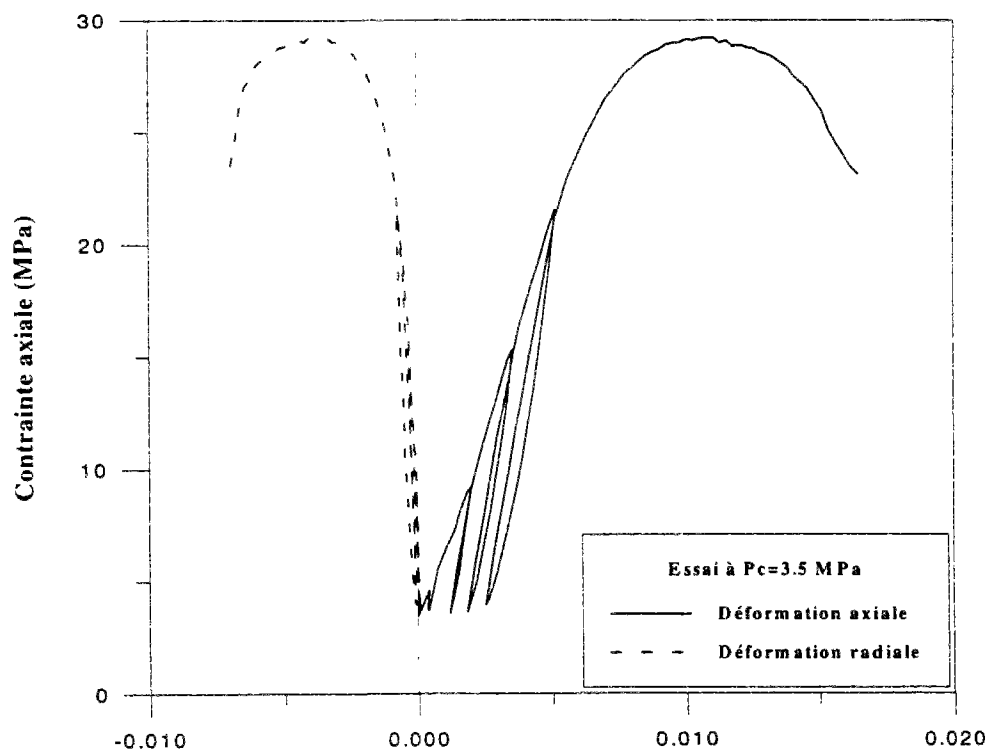
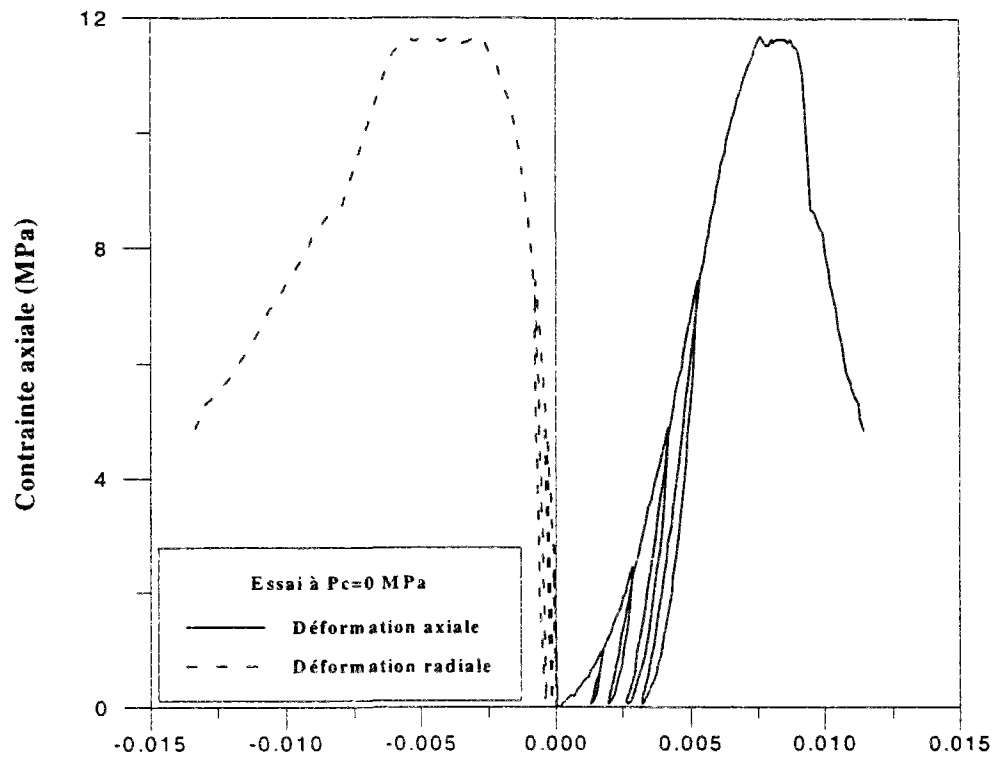
Les essais de compression triaxiale ont tous été effectués sur des échantillons de roche d'élancement  $H/R=1$  pour assurer la stabilité de l'échantillon (cf. Sulem et Vardoulakis [1990]). Des essais uniaxiaux ont été réalisés avec des élancements  $H/R=1$  et  $H/R=2$ ; ce qui a mis en évidence la présence d'une déformation verticale irréversible appelée "erreur de mise en place" plus significative pour les échantillons d'élancement  $H/R=1$  que pour ceux d'élancement  $H/R=2$  (figure 3.3 (a)) (cf. Sulem et al [1995a]). Pour y remédier un cycle de charge-décharge, permettant la mise à zéro de cette "erreur de mise en place", a été effectué à 1 Mpa. Lorsque "l'erreur de mise en place" est soustraite, les courbes contraintes-déformations des échantillons d'élancements différents coïncident dans leur partie initiale (figure 3.3 (b)).

Les mesures des déformations sont effectuées à partir de neuf jauges: trois pour les déformations axiales et six pour les déformations radiales. Ces six mesures pour les déformations radiales vont nous permettre d'étudier une éventuelle ovalisation de l'échantillon et seront utilisées pour déterminer le point de perte d'homogénéité des déformations (cf. paragraphe III.3.5).

Chaque essai a été réalisé avec des cycles de charge-décharge afin d'évaluer correctement les paramètres élastiques et leur évolution en cours d'essai.

Des exemples de courbes contraintes-déformations à différentes pressions de confinement sont représentées sur la figure 3.2. Pour l'essai non confiné (uniaxial), on remarque la présence

d'une phase de serrage (fermeture des microfissures préexistantes dans la roche) qui se traduit par la présence d'une concavité très prononcée au début de la courbe contraintes-déformations.





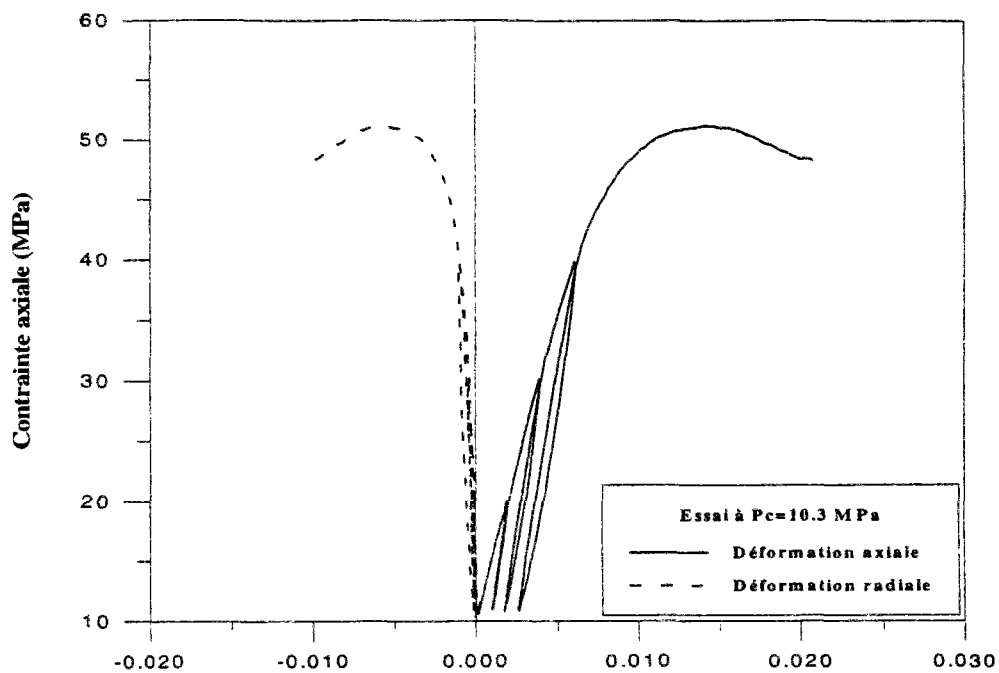
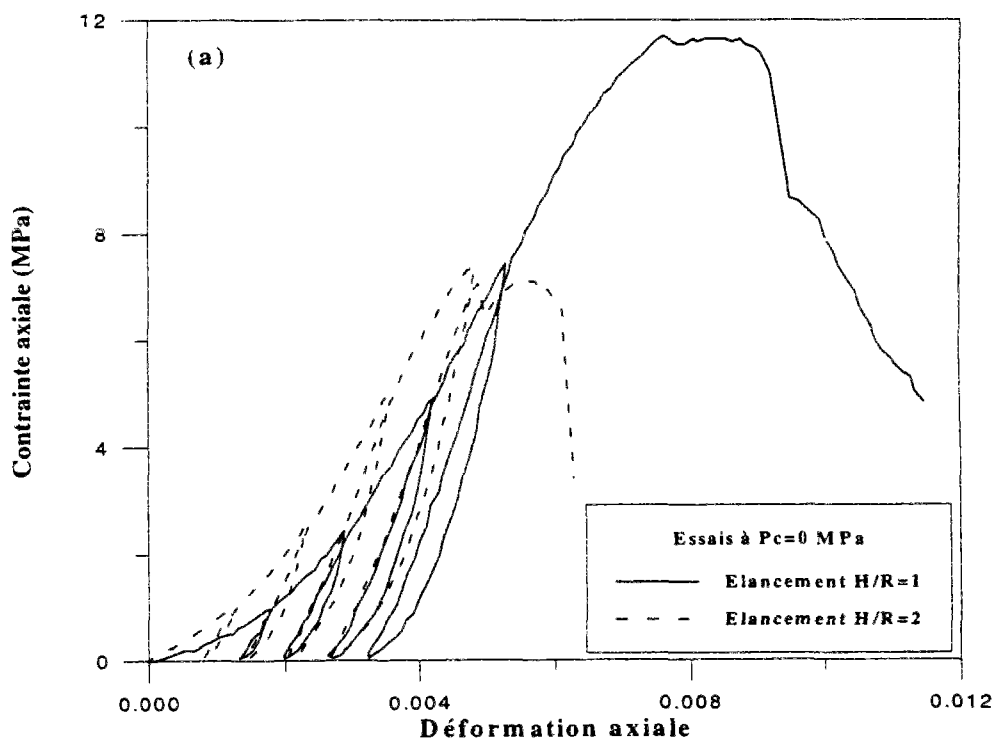


Figure 3.2: Courbes contraintes-déformations d'essais triaxiaux cycliques à différentes pressions de confinement



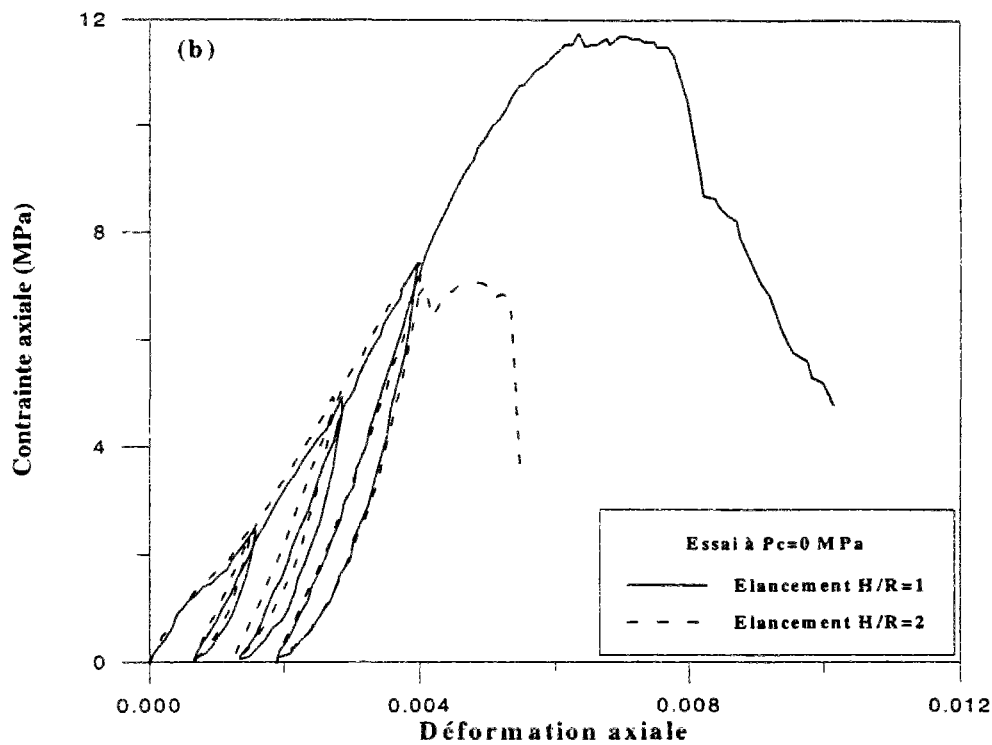
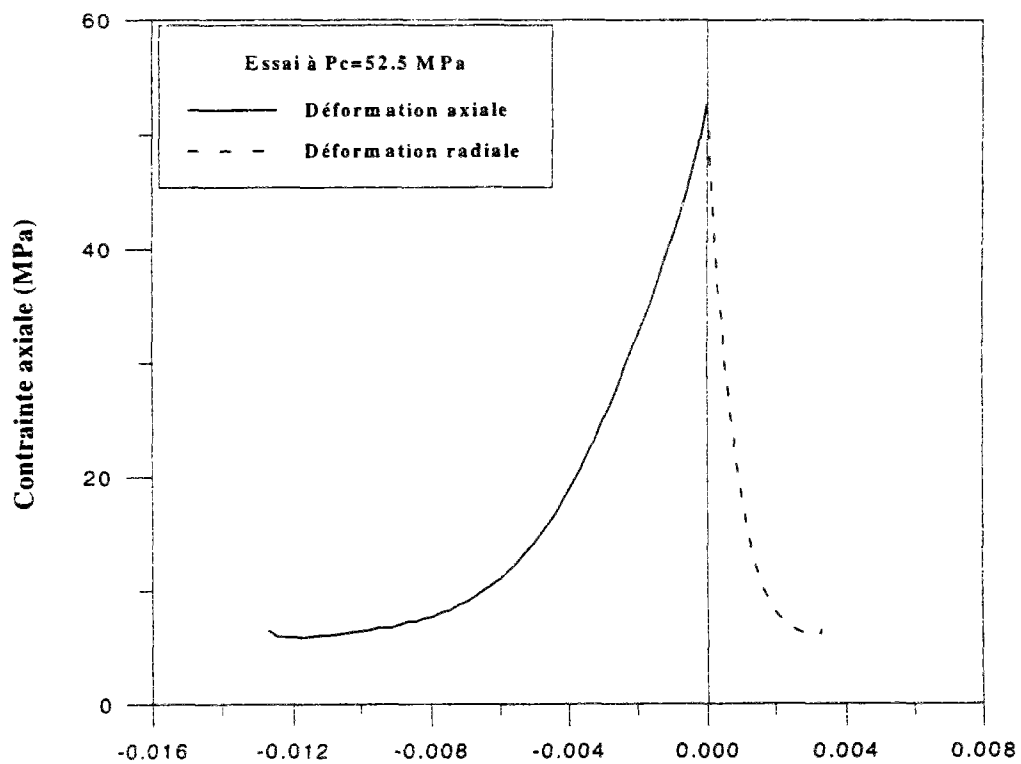
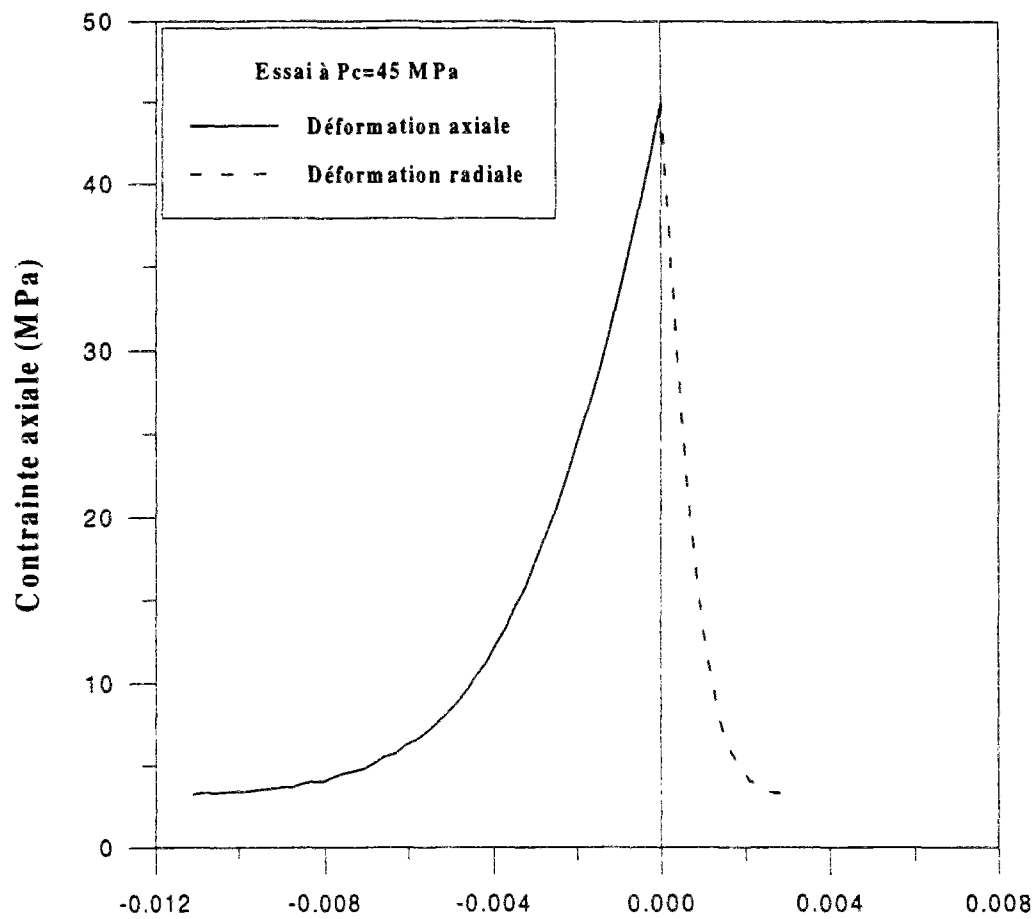


Figure 3.3: Courbe contraintes-déformations (a) sans correction de l'erreur de mise en place (b) avec correction de l'erreur de mise en place

### III.2.3 Essais d'extension triaxiale

Le mode opératoire de l'extension consiste à appliquer d'abord une contrainte isotrope donnée. L'extension est réalisée en effectuant la décharge de la pression axiale seule jusqu'au retour à la pression atmosphérique. Les essais effectués par IKU l'ont été à différentes pressions de confinement (40, 45, 52.5, 60 Mpa). Les courbes contraintes-déformations sont représentées sur la figure 3.4.



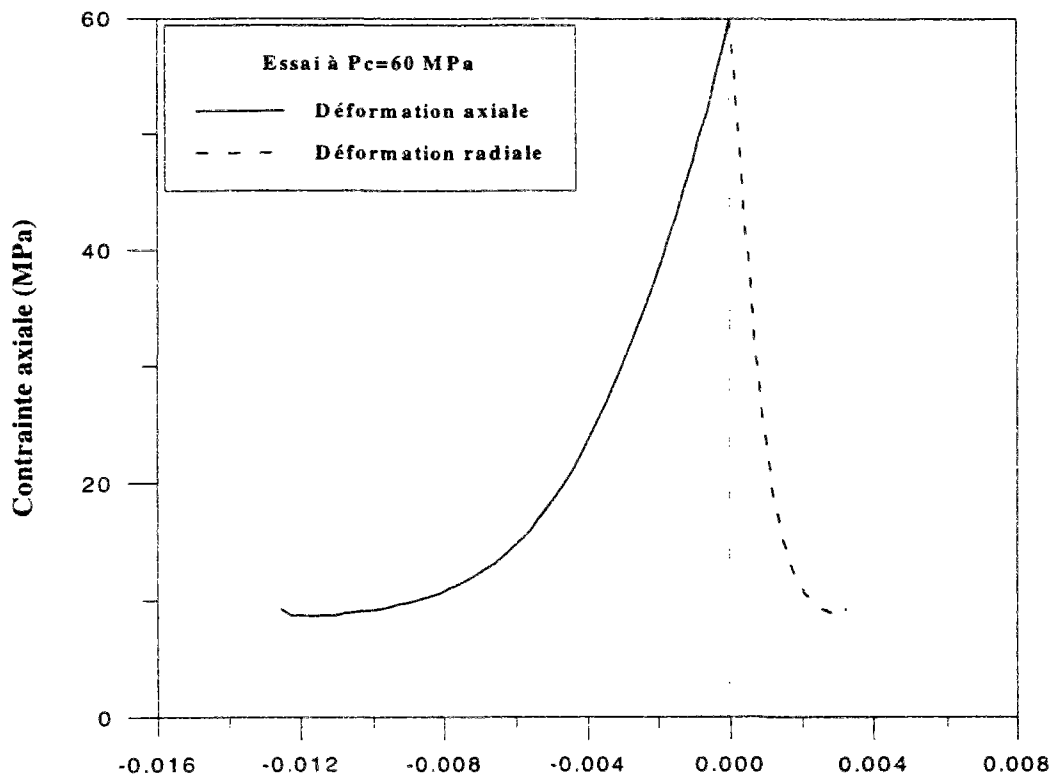


Figure 3.4: Courbes représentant les déformations axiales et radiales obtenues dans les essais d'extension triaxiale

### III.2.4 Détermination des paramètres élastiques

En supposant un comportement élastique en décharge, nous pouvons évaluer les modules élastiques sécants pour chaque cycle. L'hypothèse de décharge élastique est confortée par le fait que l'hystérésis des cycles n'est pas très marquée et que lorsque l'on recharge la courbe efforts-déformations passe par le point de décharge.

#### III.2.4.1 Coefficient de Poisson sécant

Soient  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_{\text{rad}}$  les déformations radiales et  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_{\text{ax}}$  les déformations axiales (en compression négative). Pour les essais triaxiaux à pression de confinement constante, en régime élastique

$$\Delta \varepsilon_1^e = -\nu_s \Delta \varepsilon_2^e \quad 3.2.1$$

où  $\nu_s$  est le coefficient de Poisson sécant. En conséquence les données des boucles de charge-décharge sont approximées par une droite, dont la pente est  $\nu_s$  (Lama et Vutukuri [1978]).

#### III.2.4.2 Module élastique de cisaillement sécant

Pour les essais de compression triaxiale, les contraintes axiales et radiales sont  $\sigma_z \leq \sigma_r = \sigma_\theta$ , avec  $\sigma_r = -\sigma_c = \text{const.}$  Les intensités des déviateurs des contraintes et déformations ainsi que la pression moyenne sont donc données par les relations suivantes

$$\begin{aligned} g &= 2|\varepsilon_z - \varepsilon_r|/\sqrt{3} \quad ; \quad T = |\sigma_z - \sigma_r|/\sqrt{3} \\ p &= (\sigma_z + 2\sigma_r)/3 \end{aligned} \quad 3.2.2$$

Pour les essais triaxiaux à pression de confinement constante en régime élastique on a

$$\Delta T = G_s \Delta g \quad 3.2.3$$

où  $G_s$  est le module élastique de cisaillement sécant. En conséquence les données des boucles de charge-décharge sont approximées par une droite, dont la pente est  $G_s$ .

### III.2.5 Résultats et commentaires

L'intensité du déviateur des déformations plastiques est déterminée à partir de l'évaluation de l'intensité du déviateur des déformations à la fin du cycle de décharge.

On peut ainsi construire le tableau 3.1 de données concernant chaque cycle de chaque essai ,de compression triaxiale, à des pressions de confinement différentes (Annexe B).

Ce que l'on remarque c'est que la variation de la pression de confinement n'a pas d'influence sur le coefficient de Poisson, par contre le module d'Young augmente avec la pression de confinement; cela signifie que l'augmentation de la pression latérale, conduisant à la fermeture des microfissures préexistantes, se traduit par un durcissement du grès.

Pour les essais confinés effectués, on s'aperçoit que le module élastique de cisaillement  $G_s$  diminue lorsque l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  augmente (endommagement du matériau).

Essai	$\sigma_c$ MPa	cycle	T MPa	p MPa	$g^p$	$\sigma_s$ MPa	$E_s$ MPa	$\nu$	$G_s$ MPa
101	0	1	0.57	-0.33	0.00E+0	0.98787	920	0.07	270.59
101	0	2	1.41	-0.81	7.217E-4	2.4395	2400	0.09	1100.9
101	0	3	2.88	-1.66	1.576E-3	4.9865	3100	0.16	1336.2
101	0	4	4.35	-2.51	2.581E-3	7.5334	3400	0.20	1416.7
107	0.4	1	0.58	-0.7	0.00E+0	1.3257	3730	0.11	1680.2
107	0.4	2	1.7	-1.3	9.238E-4	3.1794	4070	0.13	1800.9
107	0.4	3	3.5	-2.4	1.697E-3	6.3301	4520	0.19	1899.2
107	0.4	4	5.2	-3.4	2.021E-3	9.2824	4730	0.23	1922.8
103	1.4	1	0.59	-1.78	0.00E+0	2.6623	4780	0.11	2153.2
103	1.4	2	2.19	-2.68	6.928E-4	5.0442	5180	0.11	2333.3
103	1.4	3	4.36	-3.95	1.363E-3	8.6819	5380	0.17	2299.1
103	1.4	4	6.55	-5.15	1.848E-3	12.366	5420	0.22	2221.3
112	3.5	1	0.69	-3.9	0.00E+0	5.5884	6440	0.17	2752.1
112	3.5	2	3.54	-5.52	9.238E-4	9.4456	6870	0.17	2935.9
112	3.5	3	6.97	-7.5	1.617E-3	15.002	6870	0.21	2838.8
112	3.5	4	10.4	-9.5	2.194E-3	20.78	6460	0.25	2584
114	6.9	1	0.72	-7.3	0.00E+0	10.331	7350	0.00	3675
114	6.9	2	4.8	-9.6	6.928E-4	15.375	7900	0.17	3376.1
114	6.9	3	8.77	-11.9	1.270E-3	21.456	7750	0.18	3283.9
114	6.9	4	13.1	-14.45	1.848E-3	28.548	7600	0.21	3161.2
105	10.3	1	0.8	-10.8	0.00E+0	15.246	7300	0.16	3146.6
105	10.3	2	6	-13.7	8.083E-4	21.351	8970	0.13	3986.7
105	10.3	3	11.9	-17.2	1.617E-3	30.284	8440	0.18	3591.5
105	10.3	4	17.3	-20.3	2.540E-3	38.939	7700	0.22	3155.7

Tableau 3.1: Données concernant les cycles charge-décharge pour différents essais de compression triaxiale et uniaxiale

Pour les essais triaxiaux en extension les résultats sont représentés dans le tableau 3.2, avec  $T=0$  et  $p=\sigma_c$ . On remarque que les modules élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson) ne dépendent pas de la pression de confinement car le mode opératoire de l'extension a consisté en l'application d'une contrainte isotrope, jusqu'à atteindre la pression de confinement désirée, puis à effectuer la décharge de la contrainte axiale seule. Le phénomène de durcissement relié à la fermeture des microfissures se produit dans la phase de chargement isotrope. Au delà d'une contrainte isotrope d'environ 20 MPa le module d'Young atteint sa valeur maximale et reste constant.

$\sigma_c$ MPa	E MPa	$\nu$	G MPa	$\sigma_e$ MPa
40	1000	0.256	3980	48.39
45	1105	0.274	4336	52.4
52.5	875	0.271	3442	61.54
60	1054	0.252	4211	73.19

Tableau 3.2: Données concernant différents essais d'extension triaxiale

### III.3 Etalonnage du modèle complet

#### III.3.1 Etalonnage du coefficient de Poisson

D'après les résultats du tableau 3.1 le coefficient de Poisson augmente avec l'intensité du déviateur des déformations plastiques, on remarque également que le coefficient de poisson varie entre une valeur minimale de 0.12 et une valeur de saturation qui est de 0.25; en tenant compte de ces conditions et en reportant toutes les valeurs de  $\nu$ , pour chaque cycle de chaque essai, en fonction de  $g^p$  et en approximant par la fonction

$$\nu(g^p) = \nu_0 + \frac{(g^p)^2}{a + b g^p + c (g^p)^2} \quad 3.3.1$$

avec

$$\nu_0=0.125 \ ; \ a=0.15E-4 \ ; \ b=0.121E-4 \ ; \ c=6.896$$

3.3.2

On obtient la courbe représentée sur la figure 3.5

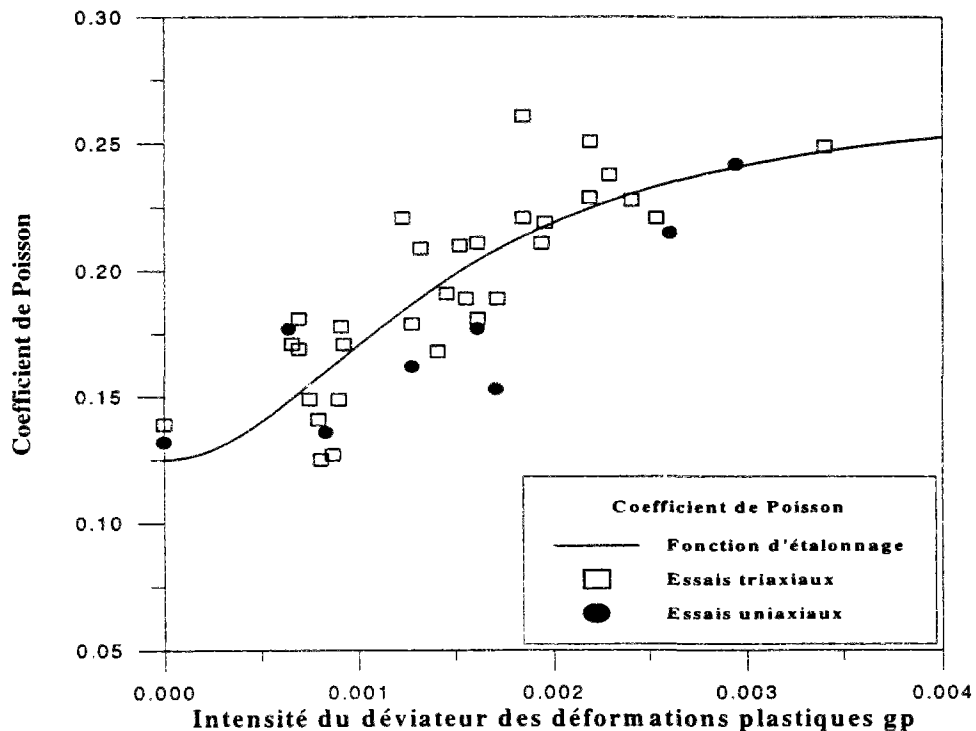


Figure 3.5: Evolution du coefficient de Poisson avec l'augmentation des déformations plastiques pour différents essais de compression triaxiale et uniaxiale

### III.3.2 Calage du module élastique de cisaillement

Le module élastique de cisaillement présente un durcissement car il augmente avec les contraintes; on remarque également qu'il y a endommagement car  $G_s$  diminue avec l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$ . Il est très important de tenir compte de cet endommagement si l'on veut décrire correctement la localisation des déformations dans le grès; par conséquent, le module élastique de cisaillement sécant est approximé par la fonction suivante



$$G_s = G_s^*(\sigma_e) \eta(g^p)$$

$$G_s^* = G_{s0} + \frac{(a - b\sigma_e)\sigma_e}{1 + c\sigma_e} \text{ pour } \sigma_e \leq \sigma_{ep}$$

3.3.3

$$G_s^* = G_{sp} \text{ pour } \sigma_e \geq \sigma_{ep}$$

$$\eta(g^p) = \lambda_1 \left( 1 + \frac{1}{1 + (\lambda_2 g^p)^2} \right)$$

avec

$$G_{s0} = 909.33 \text{ MPa}; G_{sp} = 4342.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ep} = 47.224 \text{ MPa}$$

3.3.4

$$a = 175.84; b = 1.3789; c = 1.11 \text{ E} - 02$$

$$\lambda_1 = 0.63; \lambda_2 = 700$$

On obtient la courbe représentée sur la figure 3.6

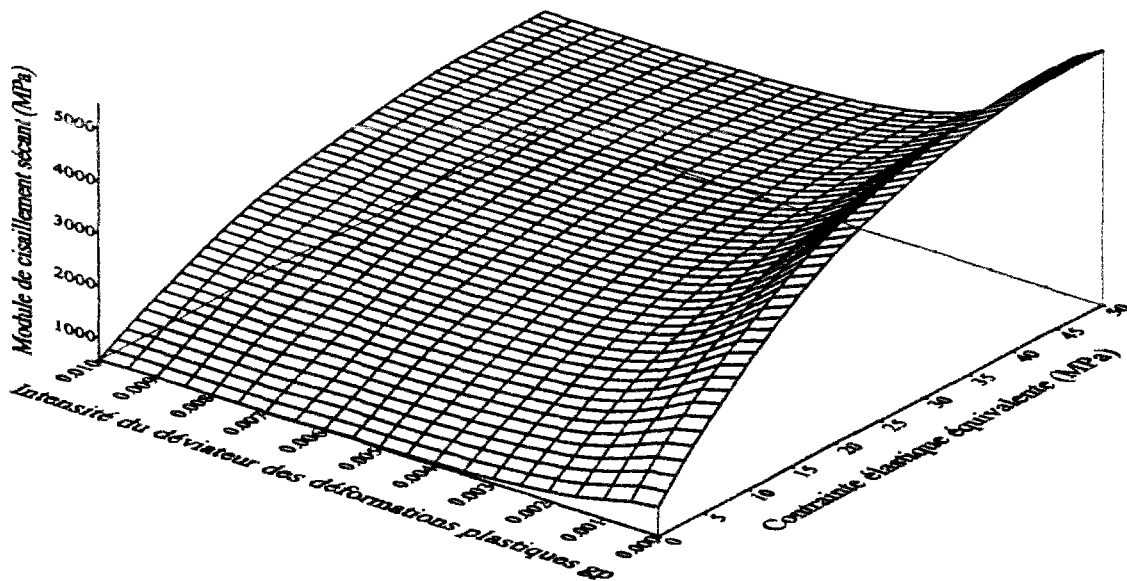


Figure 3.6: Evolution du module élastique de cisaillement sécant avec l'augmentation des contraintes et des déformations plastiques

### III.3.3 Calage du critère de plasticité non-linéaire de Mohr-Coulomb

Après avoir évalué l'élasticité du grès rouge de Wildmoor, on va passer à l'étude des propriétés plastiques de la roche, remarquons qu'une évaluation correcte des caractéristiques élastiques du matériau est indispensable pour un bon calage des propriétés plastiques. Comme annoncé en introduction, l'intensité du déviateur des déformations plastiques est une mesure macroscopique, du glissement plastique, qui se produit à travers les microfissures et les interfaces entre grains. Passé l'état d'écoulement initial, le frottement est mobilisé en tant que fonction du déviateur des déformations plastiques et atteint la saturation au pic. D'un autre côté, en cours de déformation de nouvelles microfissures peuvent apparaître. Par conséquent, un modèle de plasticité tenant compte des caractères frottant, durcissant, cohésif et radoucissant du matériau peut être calé sur les données expérimentales.

A partir du calage des propriétés élastiques, on peut évaluer l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$ , l'inclinaison des contraintes  $\phi_\sigma$  (ou le coefficient de frottement  $f$ ) et l'angle de frottement mobilisé  $\phi_m$  (ou la fonction de frottement  $\mu$ )

Les équations 2.3.7 et 2.2.23 nous permettent d'écrire les relations suivantes sachant que pour une compression triaxiale  $\alpha_s = \pi/3$  et pour une extension  $\alpha_s = 0$

$$f = \tan \phi_\sigma = \frac{T}{q-p} = \frac{2\sqrt{3} \sin \phi_m}{3 \mp \sin \phi_m} \quad 3.3.5$$

$$\mu = \sin \phi_m = \frac{3 \tan \phi_\sigma}{2\sqrt{3} \pm \tan \phi_\sigma} \quad 3.3.6$$

$$g^p = g - g^e = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_{rad} - \epsilon_{ax}) - \frac{T}{G_s} \quad 3.3.7$$

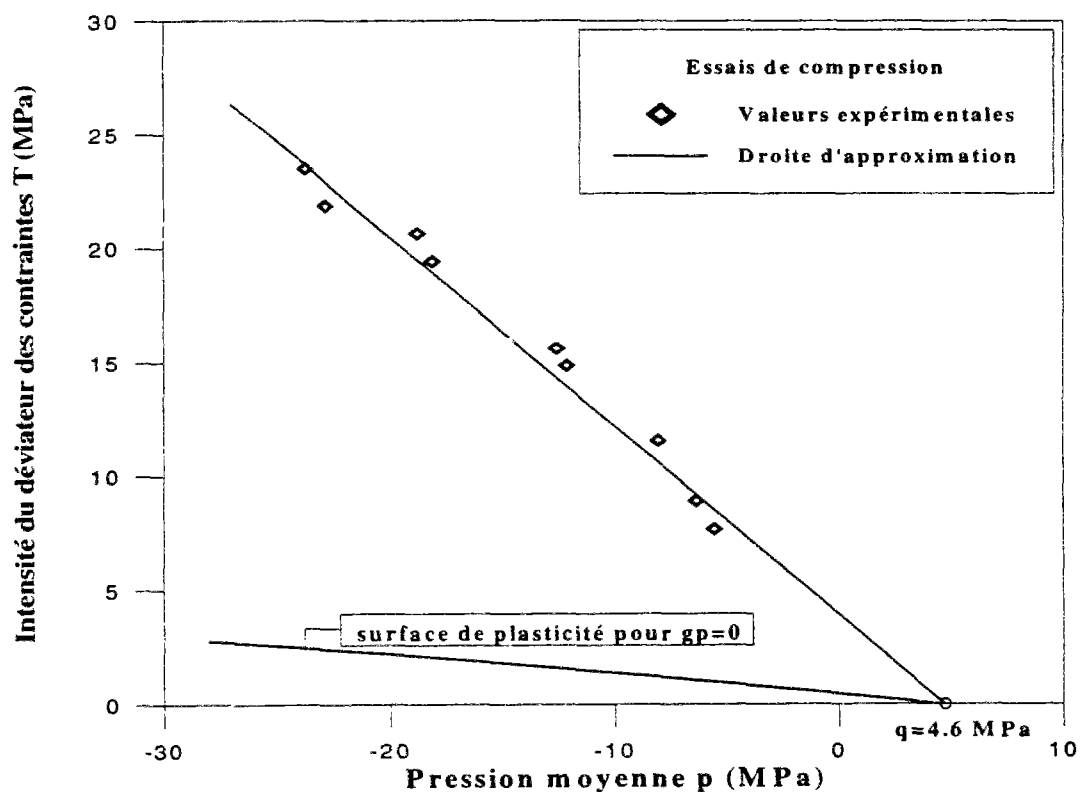
où  $(\pm)$  représente la compression triaxiale en ce qui concerne le signe supérieur et l'extension triaxiale pour le signe inférieur.

Dans le cadre du modèle de plasticité que nous avons choisi; on suppose que la constante  $q$ , dépendant de la cohésion du matériau, est constante jusqu'à la valeur au pic de l'angle de

frottement mobilisé puis diminue avec l'augmentation des déformations plastiques dans le régime post-pic (radoucissement). L'hypothèse que l'on fait est la séparation des phénomènes de frottement et de décohésion du matériau en considérant que la décohésion du matériau est négligeable avant le pic de frottement. Après le pic de frottement la fonction  $q$  dépend des déformations plastiques.

La procédure de calage du modèle constitutif commence donc par l'évaluation de  $q$  avant le pic de frottement. Par conséquent on peut porter, comme on le voit sur la figure 3.7, toutes les valeurs au pic du couple  $(p,T)$  pour différentes pressions de confinement des essais de compression et d'extension triaxiales.

En approximant les données par une droite des moindres carrés, on obtient  $q=q_0=4.6\text{MPa}$  en extension et en compression, ce qui nous permet donc de déterminer le coefficient de frottement  $f$  et la fonction de frottement mobilisée  $\mu$  grâce aux équations 3.3.5 et 3.3.6.



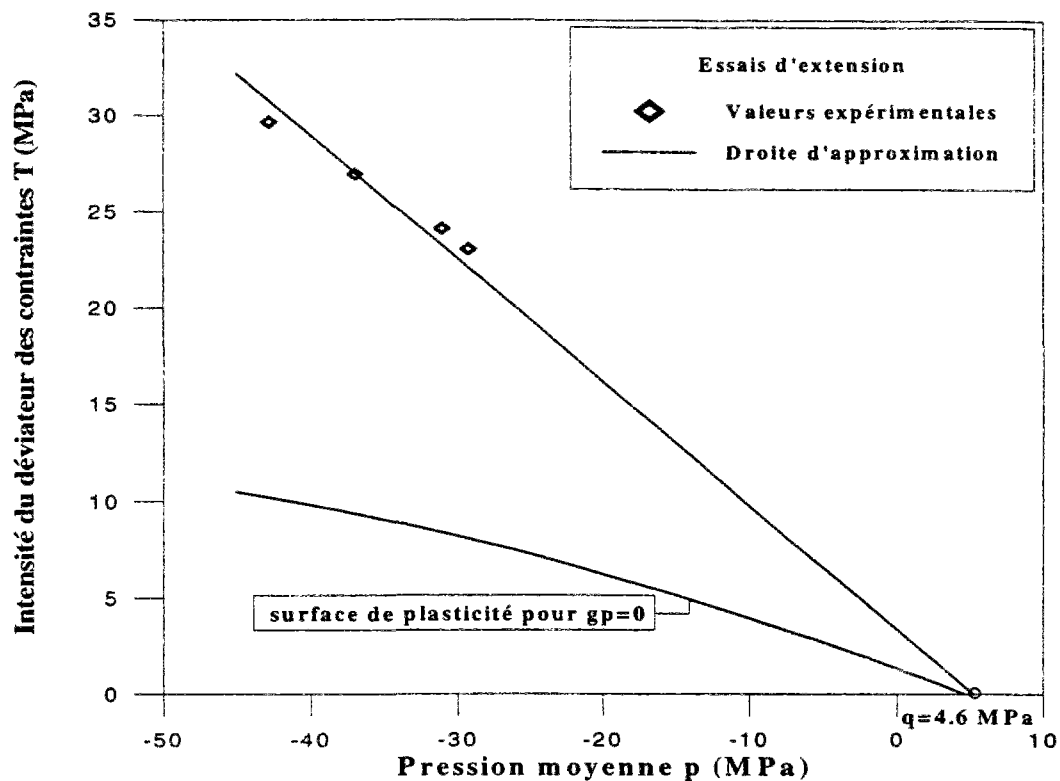


Figure 3.7: Représentation de la constante  $q_0$  au pic pour différents essais en compression et extension triaxiales

### III.3.3.1 Essais de compression triaxiale et uniaxiale

Pour les essais de compression triaxiale, l'analyse de l'évolution du coefficient de frottement avec l'augmentation des déformations plastiques à différentes pressions de confinement montre une dépendance en pression du grès rouge de Wildmoor (figure 3.8). On remarque donc sur cette figure que le coefficient de frottement  $f$  ainsi que l'angle de frottement mobilisé augmentent avec les déformations plastiques et diminuent lorsque la pression de confinement augmente

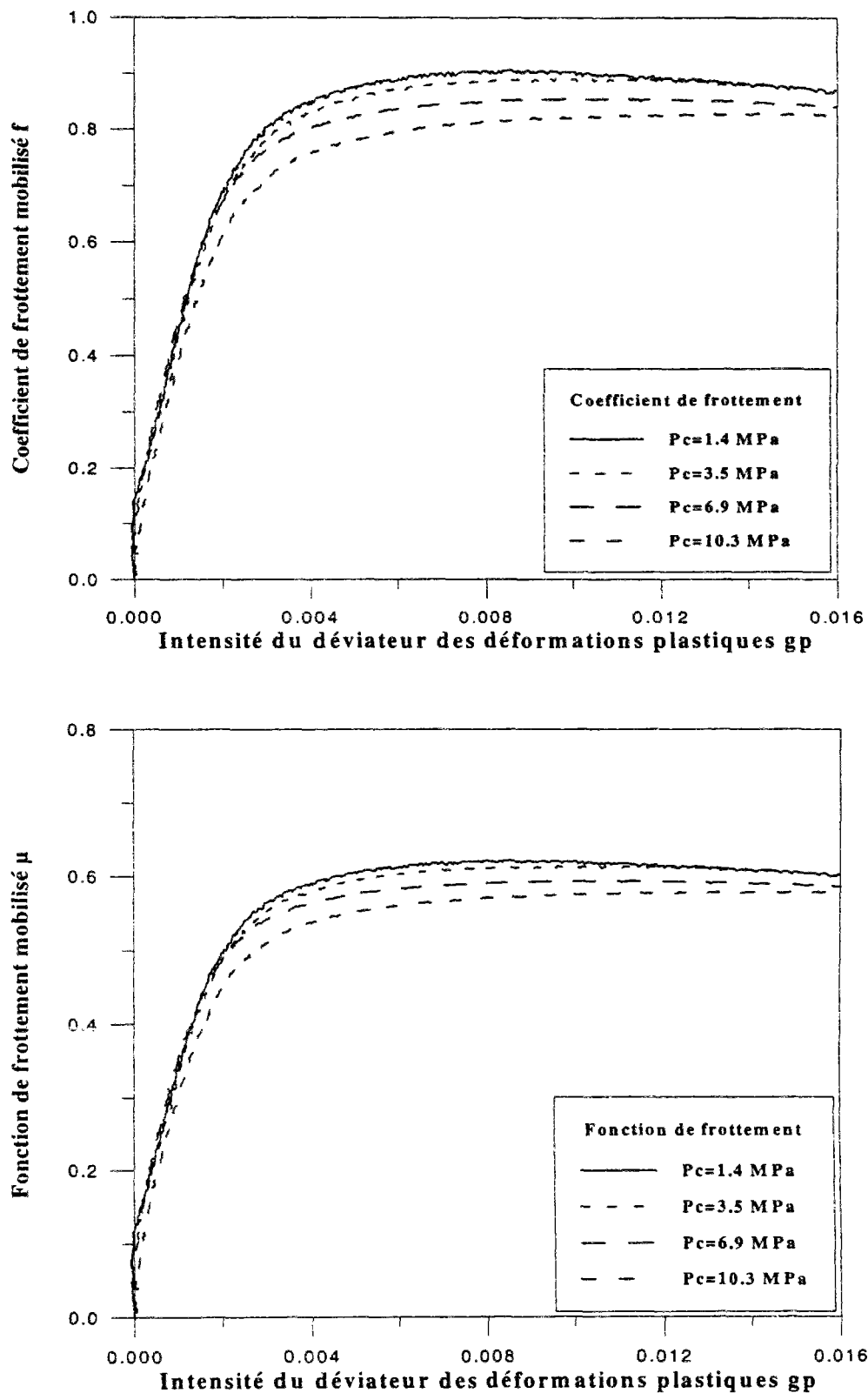


Figure 3.8: Evaluation du coefficient et de la fonction de frottement mobilisés pour différents confinements en compression triaxiale

Par conséquent nous allons tenir compte de cette dépendance en pression pour caler l'angle de frottement mobilisé par une fonction de l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  et de la pression moyenne  $p$  comme suit

$$\sin\phi_m = \mu_c(p, g^p) = \mu_c^0(g^p) \xi_c(p)$$

$$\mu_c^0(g^p) = \begin{cases} a + \frac{(b - c g^p) g^p}{1 + d g^p} & \text{pour } 0 \leq g^p \leq g_{pic}^p \\ \mu_{pic}^0 & \text{pour } g^p \geq g_{pic}^p \end{cases}$$

3.3.8

$$a = 0.1237; b = 0.39608E+03; c = 0.59869E+04; d = 0.524E+03$$

$$g_{pic}^p = 9.509E-03; \mu_{pic}^0 = 0.6623$$

$$\xi_c(p) = 1 + \frac{p}{p_0}; p_0 = 183.57 \text{ MPa} \quad (p < 0)$$

Pour caler la fonction  $\mu_c(p, g^p)$  nous avons procédé de la façon suivante: Nous avons évalué les valeurs au pic de  $\sin\phi_m$  et de la pression moyenne  $p$  à différentes pressions de confinement pour les essais de compression triaxiale; nous avons ensuite approximer ces valeurs par une droite des moindres carrés pour la calage de la fonction  $\xi_c(p)$ . Puis nous avons approximer les données  $\sin\phi_m / \xi_c(p)$  par la fonction hyperbolique  $\mu_c^0(g^p)$  (figure 3.9) fonction de  $g^p$  seulement. La fonction  $\mu_c(p, g^p)$  obtenue augmente avec les déformations plastiques et diminue lorsque la pression moyenne augmente en valeur absolue.

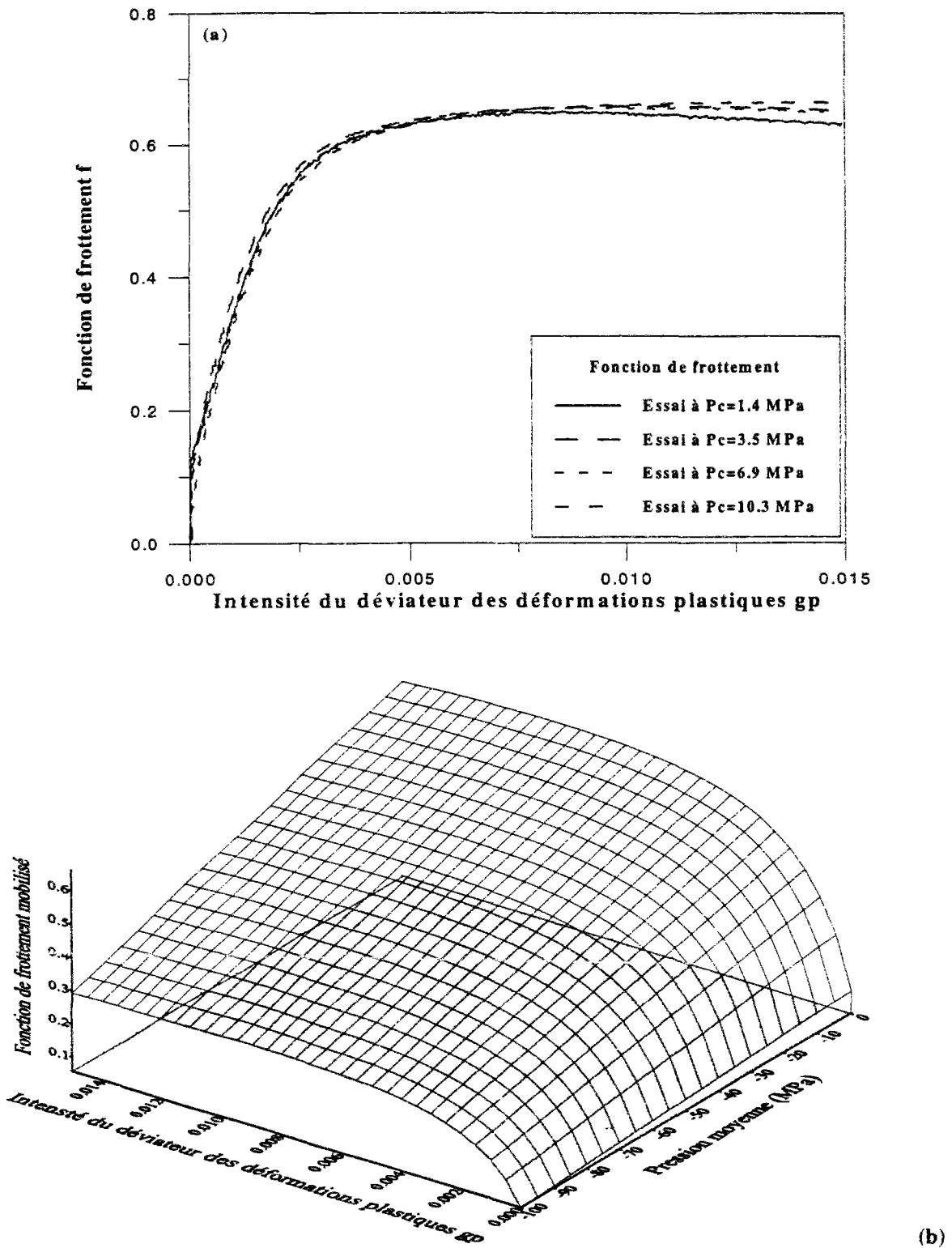


Figure 3.9: Représentation de la procédure de calage de la fonction de frottement sur différents essais de

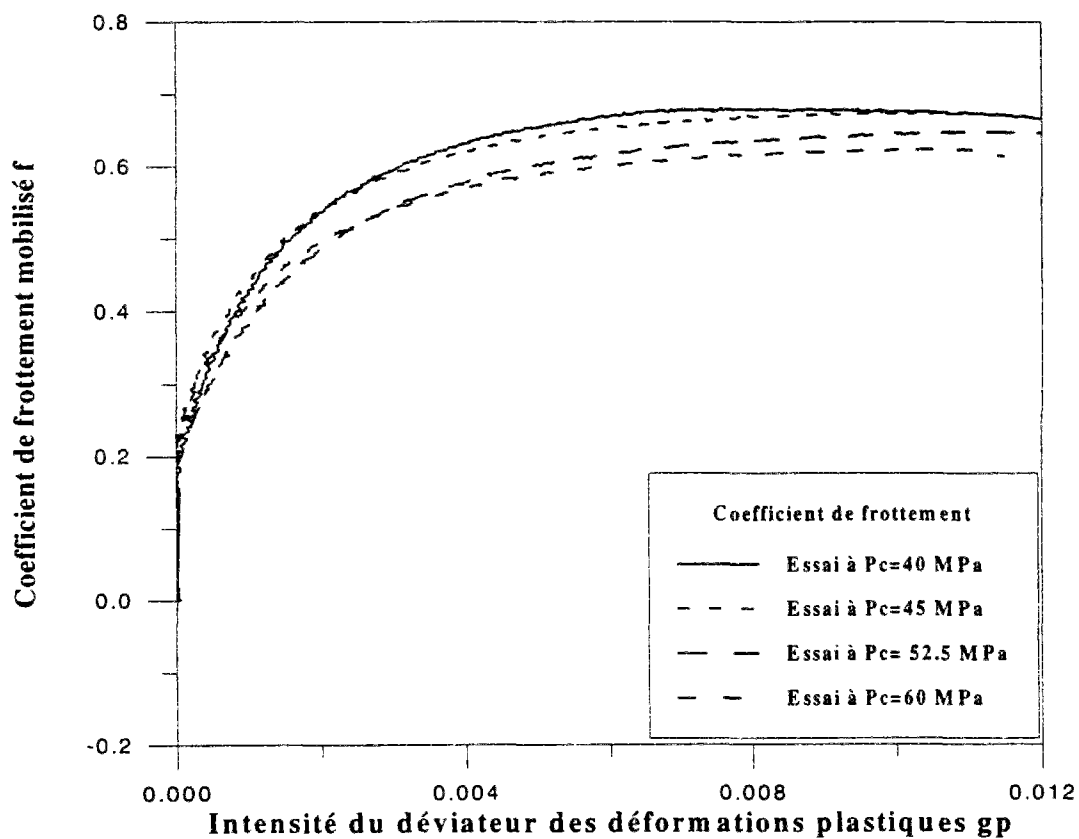
compression triaxiale: (a)  $\mu_c^0(g^p) = \mu_c(g^p, p) / \epsilon_c(p)$ , (b)  $\mu_c(g^p, p)$

Le coefficient de frottement correspondant en compression triaxiale  $f_c(p, g^p)$  est donné par la relation 3.3.5.

$$f_c(p, g^p) = \frac{2\sqrt{3}\mu_c(p, g^p)}{3 - \mu_c(p, g^p)} \quad 3.3.9$$

### III.3.3.2 Essais d'extension triaxiale

Pour les essais d'extension triaxiale, l'analyse de l'évolution du coefficient de frottement avec l'augmentation des déformations plastiques à différentes pressions de confinement montre également une dépendance en pression (figure 3.10).





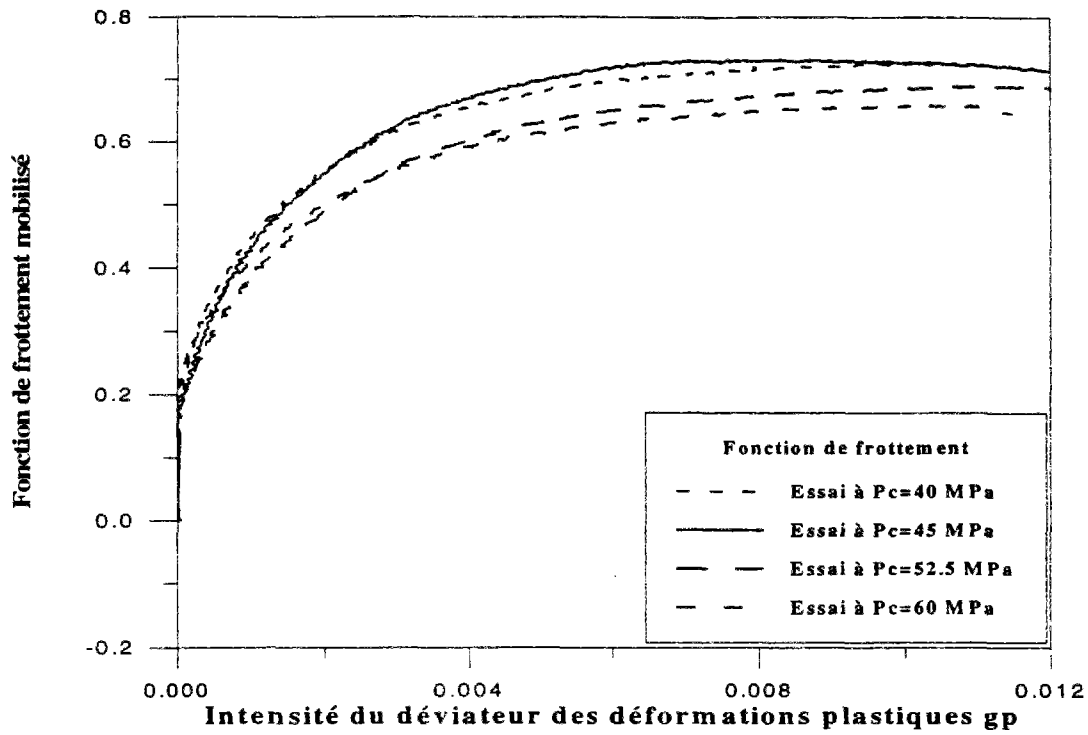


Figure 3.10: Evaluation du coefficient et de la fonction de frottement mobilisés pour différents confinements en extension triaxiale

Comme pour les essais de compression triaxiale, nous allons tenir compte de cette dépendance en pression pour caler l'angle de frottement mobilisé par une fonction de l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  et de la pression moyenne  $p$  comme suit (figure 3.11)

$$\sin \phi_m = \mu_e(p, g^p) = \mu_e^0(g^p) \xi_e(p)$$

$$\mu_e^0(g^p) = \begin{cases} a + \frac{(b - c g^p) g^p}{1 + d g^p} & \text{pour } 0 \leq g^p \leq g_{pic}^p \\ \mu_{pic}^0 & \text{pour } g^p \geq g_{pic}^p \end{cases}$$

3.3.10

$$a=0.27; b=0.40603E+03; c=0.47876E+04; d=0.47279E+03$$

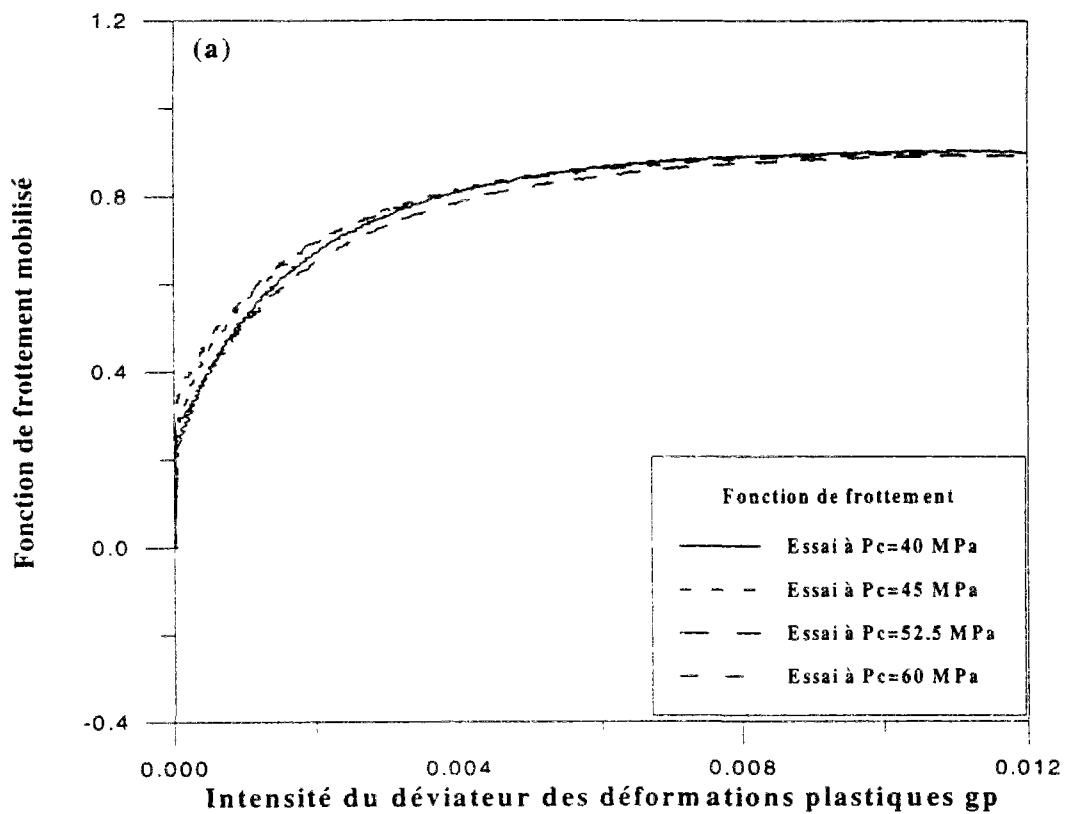
$$g_{pic}^p = 1.1E-02; \mu_{pic}^0 = 0.8969$$

$$\xi_e(p) = 1 + \frac{p}{p_0}; p_0 = 161.88 \text{ MPa } (p < 0)$$

Le coefficient de frottement correspondant en extension triaxiale  $f_e(p, g^p)$  est donné par la relation 3.3.5.

$$f_e(p, g^p) = \frac{2\sqrt{3}\mu_e(p, g^p)}{3 + \mu_e(p, g^p)} \quad 3.3.11$$

Comme pour les essais en compression la fonction  $\mu_e(p, g^p)$  augmente avec les déformations et diminue lorsque la pression moyenne augmente en valeur absolue.



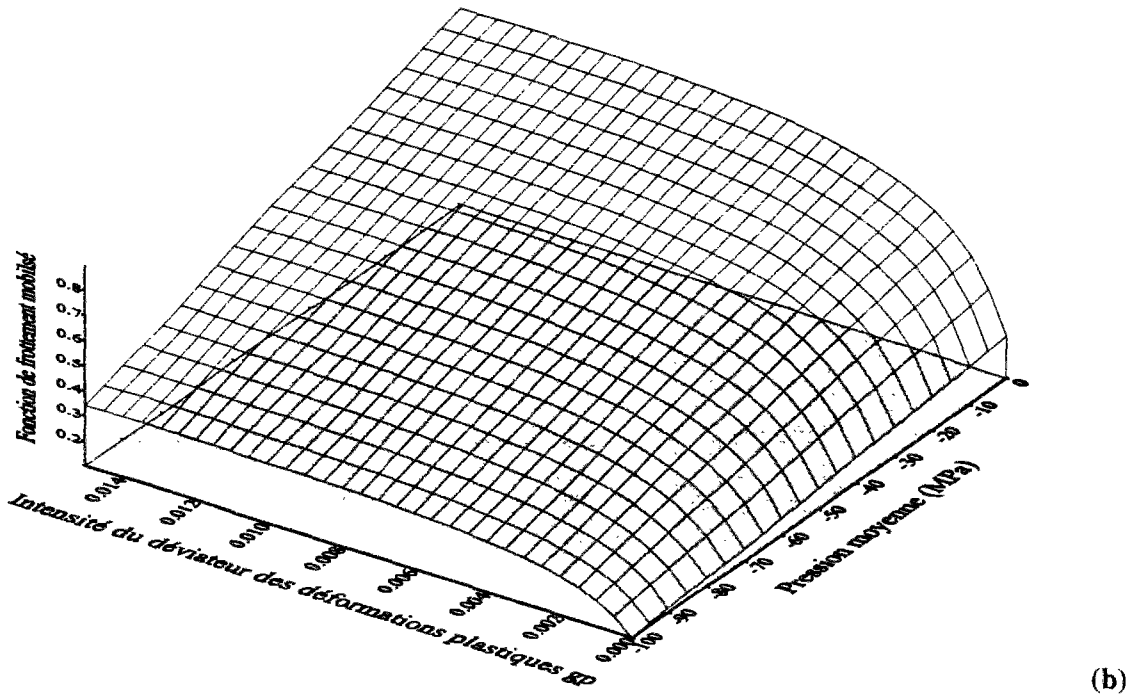


Figure 3.11 : Représentation de la procédure de calage de la fonction de frottement pour différents essais en extension triaxiale: (a)  $\mu_e^0(g^P) = \mu_e(g^P, p) / \varepsilon_e(p)$ , (b)  $\mu_e(g^P, p)$  pour les confinements 40, 45, 52.5 et 60 Mpa

### III.3.3.3 Le critère de plasticité dans l'espace des contraintes

Pour prendre en compte l'influence du troisième invariant des contraintes sur le critère de plasticité dans l'espace des contraintes, nous allons effectuer une interpolation linéaire entre les conditions d'extension et de compression

$$F = T[a(p, g^P) \cos \alpha_s + b(p, g^P) \sin \alpha_s] - (q - p) \quad 3.3.12$$

Pour les conditions d'extension triaxiale  $\alpha_s = 0$  et pour les conditions d'extension triaxiale  $\alpha_s = \pi/3$ . On peut donc relier les fonctions  $a(p, g^P)$  et  $b(p, g^P)$  aux coefficients de frottement en compression  $f_c$  et extension  $f_e$  donnés respectivement par les équations 3.3.9 et 3.3.11

$$a(p, g^P) = \frac{1}{f_e(p, g^P)}; b(p, g^P) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{f_c(p, g^P)} - \frac{1}{f_e(p, g^P)} \right) \quad 3.3.13$$

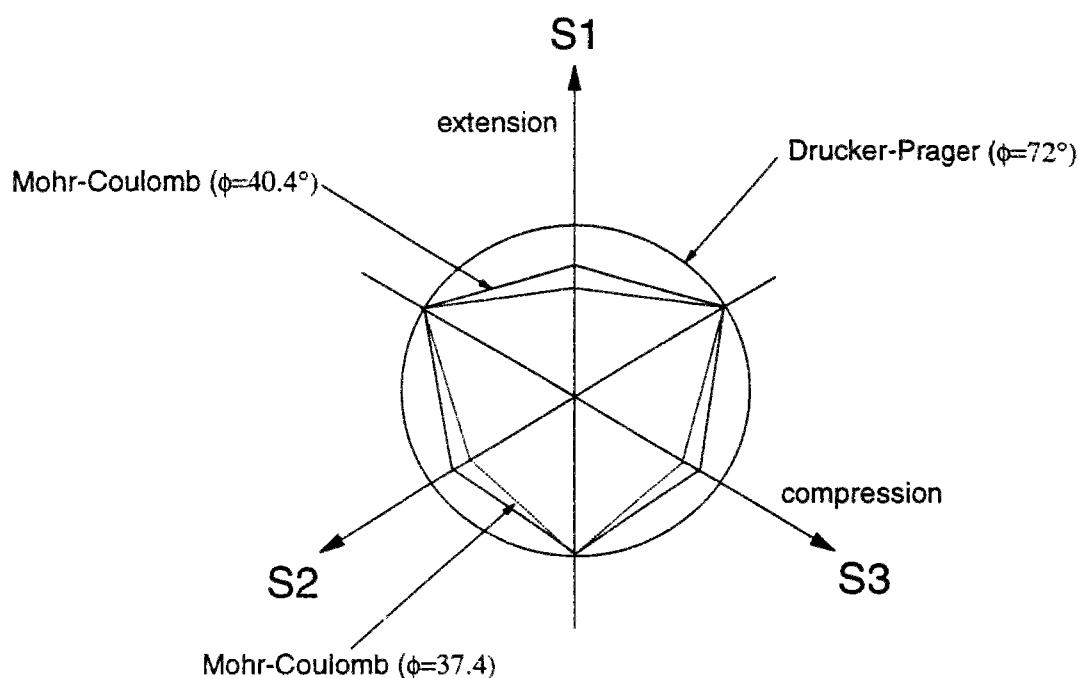


Figure 3.12: Angle de frottement au pic: Représentation du critère de plasticité dans le plan déviatorique.

L'angle maximum de frottement mobilisé calculé à partir des essais de compression triaxiale est  $\phi_{cp}=37.4^\circ$ , l'angle de frottement correspondant en extension triaxiale est  $\phi_{ep}=40.4^\circ$ . Le modèle de Mohr-Coulomb prédit le même angle de frottement en extension et en compression; par conséquent si l'on se base sur les essais de compression triaxiale pour caler le modèle constitutif, le critère de Mohr-Coulomb pourrait sous-estimer l'angle de frottement en extension de  $3^\circ$ . Nous pourrions donc prendre en compte l'interpolation 3.3.12 et 3.3.13 pour modifier le critère de Mohr-Coulomb, cependant les simulations effectuées par Vardoulakis, Sulem et Papamichos [1993] à partir d'essais biaxiaux prouvent que cette approximation de  $3^\circ$  est acceptable (figure 3.12)

### III.3.4 Calage du potentiel plastique de Drucker-Prager

#### III.3.4.1 Essais de compression triaxiale et uniaxiale

La procédure de calage du potentiel plastique est basée sur l'évaluation du paramètre de dilatance  $d=d\epsilon_v^p/dg^p$  à partir des données des différents essais de compression triaxiale. A partir de la figure 3.13 on peut observer que le paramètre de dilatance dépend de la pression de confinement de chaque essai considéré, à basse pression de confinement la roche se dilate fortement par contre à haute pression de confinement la dilatance est moins importante.

Afin d'évaluer le paramètre de dilatance  $d=d\epsilon_v^p/dg^p$ ; nous avons commencé par déterminer une hyperbole d'approximation pour les déformations volumiques, à différentes pressions de confinement, de la forme suivante

$$\epsilon_v^p = \frac{ag^p + b(g^p)^2}{1 + cg^p}; d = \frac{d\epsilon_v^p}{dg^p} = \frac{a + 2bg^p + bc(g^p)^2}{(1 + cg^p)^2} \quad 3.3.14$$

Les coefficients a, b et c pour les essais de compression triaxiale, à différentes pressions de confinement, sont donnés dans le tableau 3.3

pression de confinement MPa	a	b	c
0	-1.7626	350.21	343.05
0.4	-2.0044	340.46	366.7
1.4	-2.2731	265.35	438
3.5	-2.6571	333.84	602.96
6.9	-2.9309	187.78	618.01
10.3	-2.5612	146.53	463.1

Tableau 3.3: Valeurs des coefficients de la fonction  $\epsilon_v^p(g^p)$

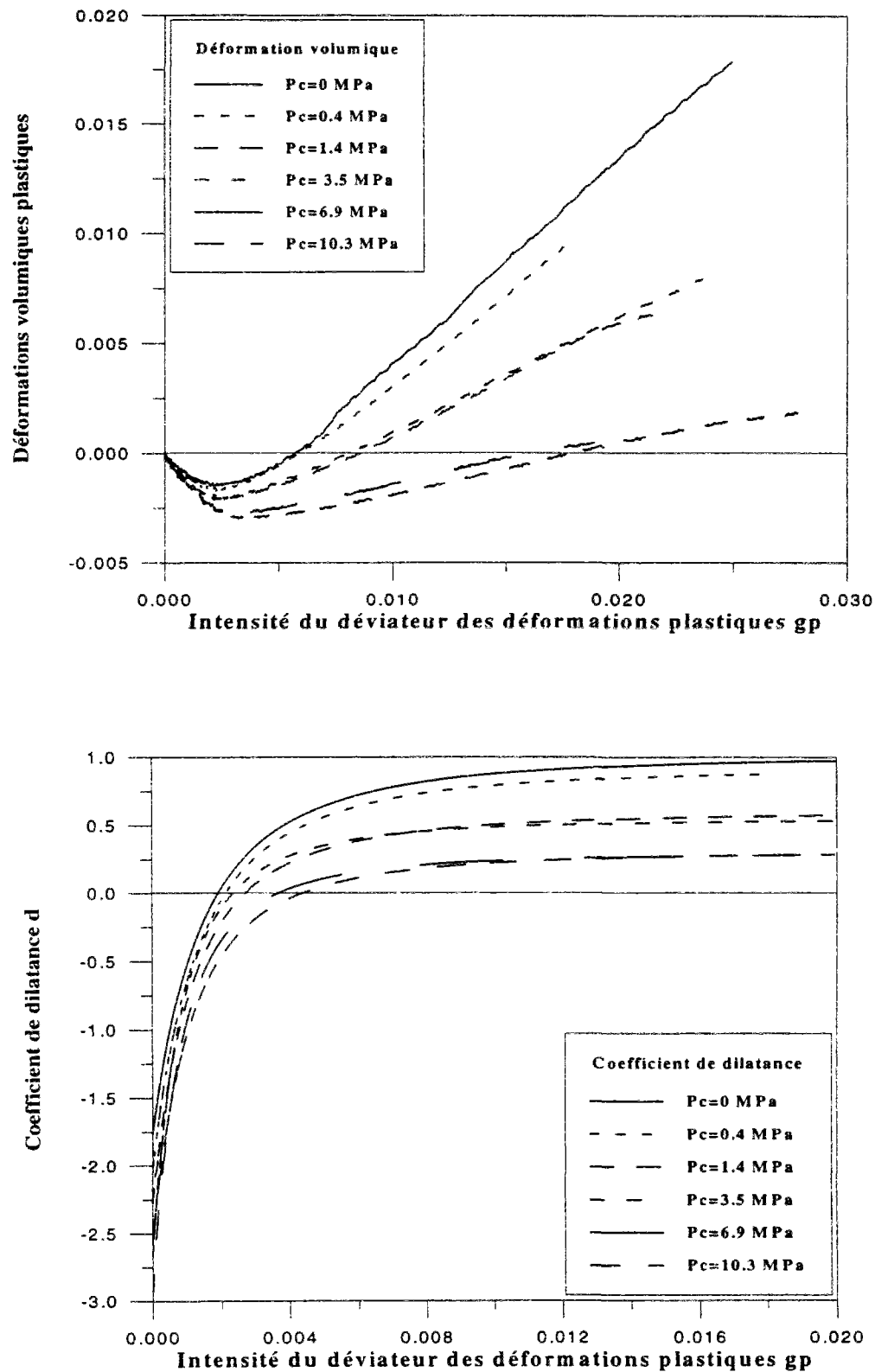


Figure 3.13: Evaluation des déformations volumiques plastiques et du paramètre de dilatance à différentes pressions de confinement pour les essais de compression triaxiale

Comme pour la fonction de frottement mobilisé  $\mu_c(p, g^p)$ , le paramètre de dilatance est calé en tant que fonction des déformations plastiques et de la pression moyenne (figure 3.14). Ce qui nous donne

$$d_c(p, g^p) = d_c^0(g^p) \xi_c(p)$$

$$d_c^0 = a + \frac{(b - c g^p) g^p}{1 + d g^p}$$

3.3.15

$$a = -1.3858; b = 0.76768E+04; c = 0.69157E+04; d = 0.37504E+03$$

$$\xi_c(p) = \left(1 + \frac{p}{p_1}\right)^n; p_1 = 150 \text{ Mpa}; n = 0.5$$

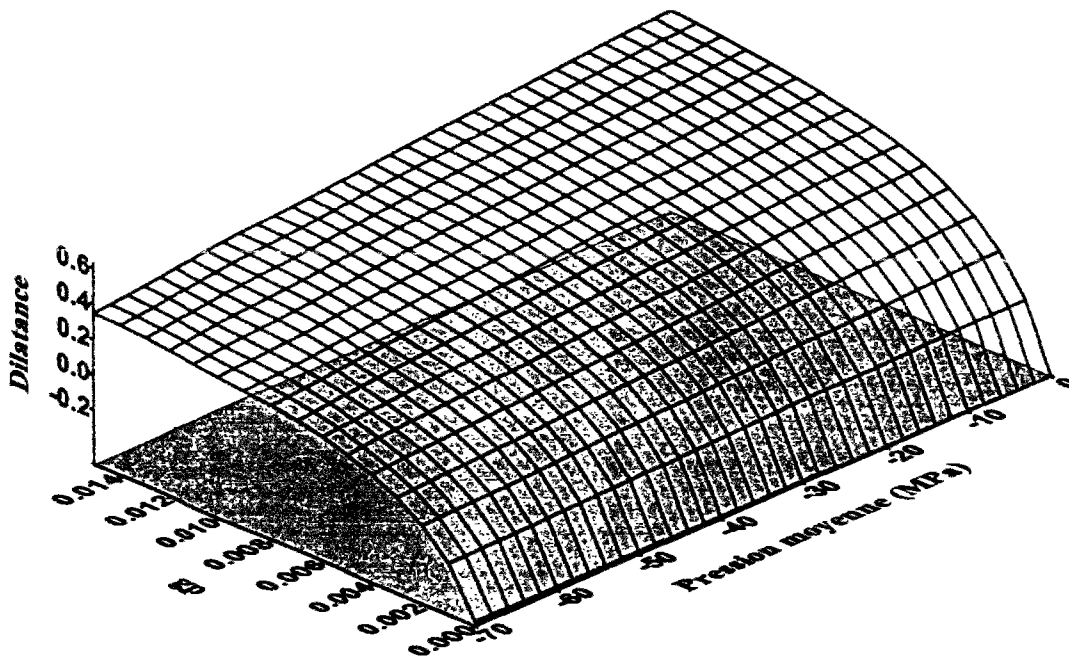


Figure 3.14: Représentation de la fonction de dilatance  $d_c(p, g^p)$  pour les essais de compression triaxiale

### III.3.4.2 Essais d'extension triaxiale

D'autre part pour les essais d'extension triaxiale la loi de normalité est applicable tant que l'hypothèse  $d_e(p, g^p) = f_e(p, g^p)$  ( $f_e$  est donnée par les équations 3.3.10 et 3.3.11) reproduit correctement les données expérimentales.

### III.3.5 Etalonnage du comportement post-pic du grès

Le comportement post-pic (radoucissant), du grès est étudié à partir de l'évolution du paramètre  $q$ . Celui-ci, considéré comme constant jusqu'au pic de frottement mobilisé diminue avec la déformation plastique  $g^p$  au delà du pic traduisant ainsi le phénomène de décohésion progressive du matériau. L'étalonnage de ce paramètre est effectué dans la partie de la phase homogène de la courbe efforts-déformations c'est à dire entre le pic et un point que nous avons déterminé pour chaque essai correspondant à la perte d'homogénéité des déformations. En l'absence de techniques d'observations directes du point d'initiation de la localisation des déformations, nous avons déterminé ce point à partir de la comparaison de différentes mesures de la déformation radiale, cette méthode consiste à repérer le point de perte de linéarité de la courbe représentant les mesures des déformations radiales obtenues à partir de deux jauges disposées perpendiculairement l'une par rapport à l'autre sur l'échantillon (figure 3.15 (a)) (cf. Santarelli [1987] et Haied [1995]). Par la suite nous avons calculé la déformation plastique correspondant à ce point de perte de linéarité des déformations pour différents essais triaxiaux à différentes pressions de confinement (0.4, 1.4, 3.5, 6.9 et 10.3 MPa). Nous avons pu ainsi déterminer le paramètre  $q$  dans le régime radoucissant, pour différentes pressions de confinement, en approximant les données (figure 3.15 (b)) par une parabole de la forme

$$q = q_0 - \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq g^p \leq g_{pic}^p \\ c_q (g^p - g_{pic}^p)^2 & \text{pour } g^p \geq g_{pic}^p \end{cases} \quad 3.3.16$$

$$q_0 = 4.6; c_q = 1.32214E+04; g_{pic}^p = 9.509E-03$$



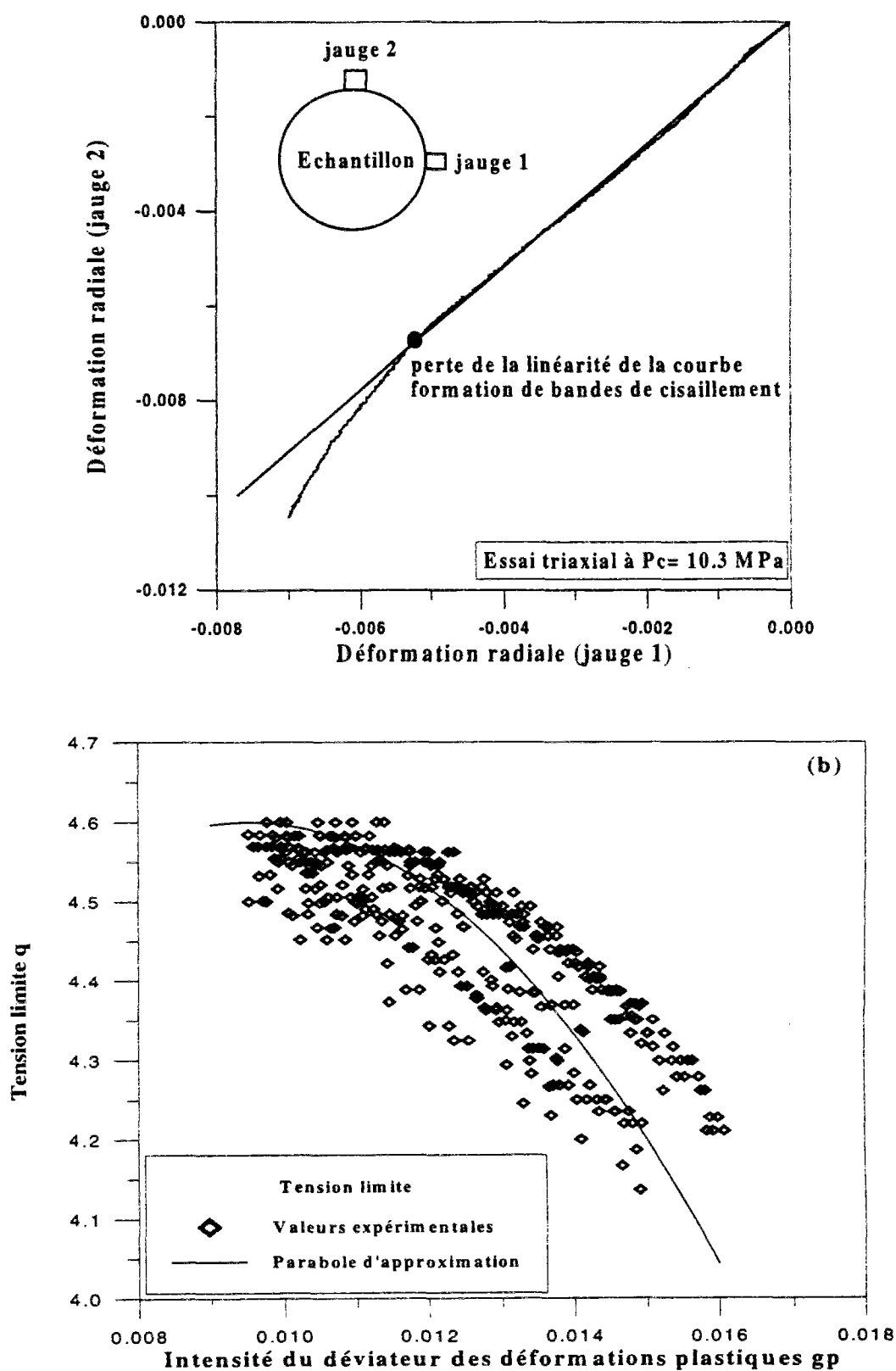


Figure 3.15: (a) Représentation des déformations radiales obtenues à partir de deux jauges perpendiculaires l'une par rapport à l'autre, (b) Evaluation du paramètre  $q$  par rapport aux déformations plastiques en régime radoucissant pour différentes pressions de confinement.

### III.4 Etalonnage d'un modèle simplifié

Comme cela a été présenté plus haut, le modèle constitutif complet est dépendant en pression dans tous ses aspects; élasticité, frottement mobilisé et dilatance mobilisée. Le calage du modèle complet a pu être réalisé grâce au grand nombre d'essais effectués par IKU (essais triaxiaux et uniaxiaux en compression, essais triaxiaux en extension). Généralement, lorsque l'on n'a pas une base de données aussi importante, il est recommandé d'utiliser le modèle simplifié dont les caractéristiques sont les suivantes

#### III.4.1 Elasticité isotrope linéaire

Pour obtenir un modèle élastique simplifié nous pouvons négliger la dépendance en pression des modules élastiques ainsi que l'endommagement du matériau. Il faut pour cela déterminer les valeurs moyennes, du coefficient de Poisson et du module élastique de cisaillement sécant, en intégrant les équations 3.3.1 et 3.3.3; ce qui nous donne

$$\nu = \langle \nu_s \rangle = \frac{1}{g_{pic}^p} \int_0^{g_{pic}^p} \nu_s(g^p) dg^p = 0.19 \quad 3.4.1$$

$$G = \langle G_s \rangle = \frac{1}{\sigma_e^{pic} g_{pic}^p} \int_0^{\sigma_e^{pic}} G_s^*(\sigma_e) d\sigma_e \int_0^{g_{pic}^p} \eta(g^p) dg^p = 2.84 \text{ GPa} \quad 3.4.2$$

Le module d'Young correspondant est donc

$$E = 2(1+\nu)G = 6.75 \text{ GPa} \quad 3.4.3$$

La figure 3.16 suggère que si les cycles de charge-décharge sont effectués à 30% du pic des déformations axiales pour une pression de confinement intermédiaire (3.5 Mpa) alors les effets des contraintes et de l'endommagement s'équilibrent mutuellement ce qui fait que l'on obtient des modules élastiques sécants assez proches des valeurs moyennes. Nous pouvons

donc recommander de toujours inclure, dans les essais triaxiaux cycliques de compression, une boucle à trente pour cent du pic des déformations axiales; ce qui permet d'avoir une bonne estimation des moyennes des modules élastiques sécants.

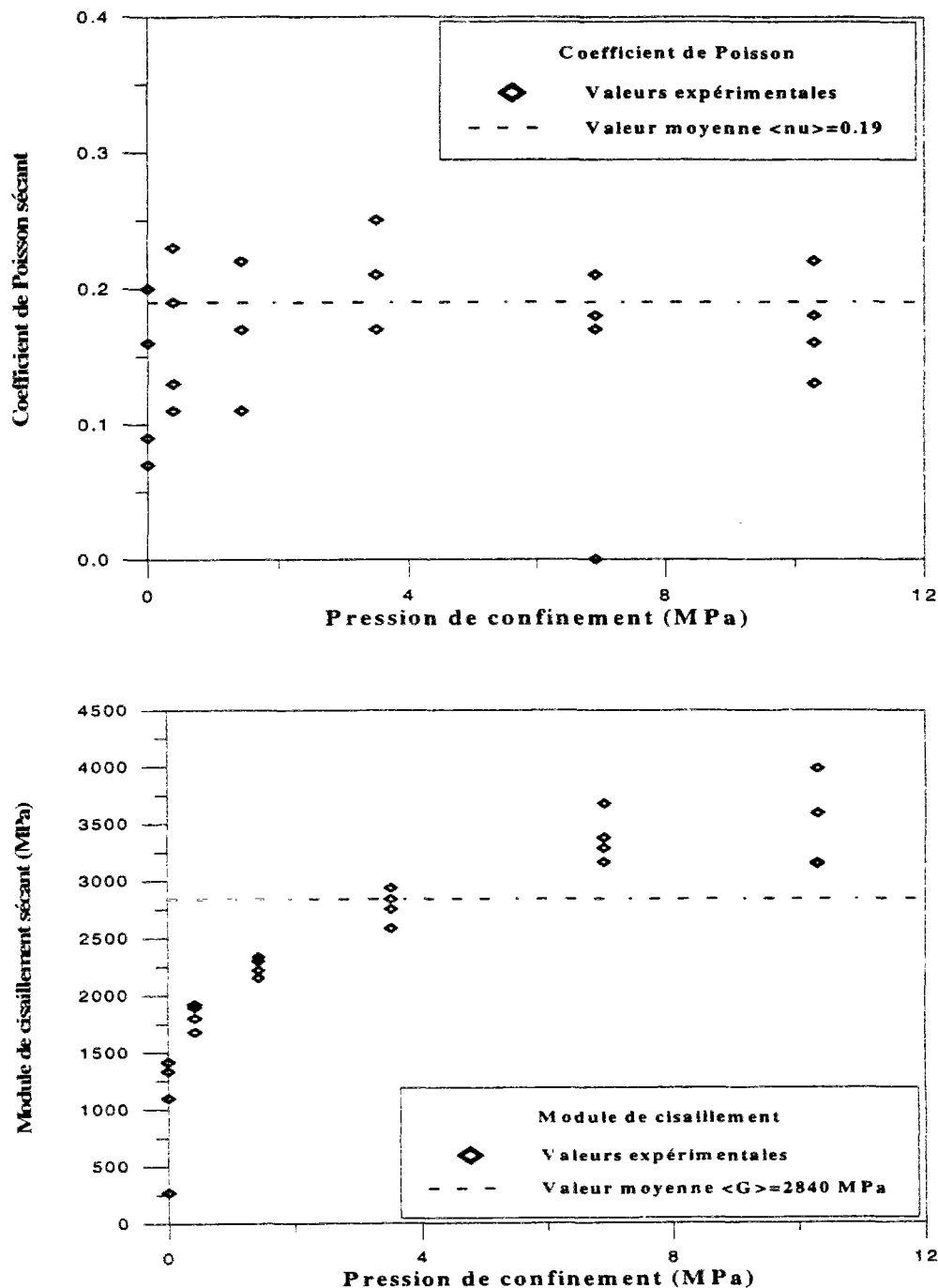


Figure 3.16: Evaluation du coefficient de Poisson et du module élastique de cisaillement pour des essais de compression triaxiale cycliques à différentes pressions de confinement

### III.4.2 Critère de plasticité et potentiel plastique linéaires

Le modèle simplifié est obtenu en moyennant par rapport à la pression, les fonctions de frottement et de dilatance ne dépendent plus alors que des déformations plastiques.

Pour les essais de compression nous avons

$$\sin \phi_m = \langle \mu_c(p, g^p) \rangle = \frac{1}{p_{pic}} \int_0^{p_{pic}} \mu_c^0(g^p) \xi_c(p) = \mu_c^0(g^p) \left( 1 + \frac{p_{pic}}{p_0} \right)$$

$$\mu_c^0(g^p) = \begin{cases} a + \frac{(b - c g^p) g^p}{1 + d g^p} & \text{pour } 0 \leq g^p \leq g_{pic}^p \\ \mu_{pic}^0 & \text{pour } g^p \geq g_{pic}^p \end{cases}$$

3.4.4

$$a=0.1237; b=0.39608E+03; c=0.59869E+04; d=0.524E+03$$

$$g_{pic}^p = 9.509E-03; \mu_{pic}^0 = 0.6623$$

$$p_{pic} = -23.507 \text{MPa}; p_0 = 183.57 \text{MPa} (p < 0)$$

pour la fonction de dilatance on obtient

$$\langle d_c(p, g^p) \rangle = \frac{1}{p_{pic}} \int_0^{p_{pic}} d_c^0(g^p) \xi_c(p) = \frac{p_1}{n+1} d_c^0(g^p) \left( 1 + \frac{p_{pic}}{p_1} \right)^{n+1}$$

$$d_c^0 = a + \frac{(b - c g^p) g^p}{1 + d g^p}$$

3.4.5

$$a=-1.3858; b=0.76768E+04; c=0.69157E+04; d=0.37504E+03$$

$$p_{pic} = -23.507 \text{MPa}; p_1 = 150 \text{Mpa}; n=0.5$$

Pour les essais en extension la procédure est la même.

## III.5 Validation du modèle complet et comparaison avec le modèle simplifié

Nous avons validé le modèle complet et le modèle simplifié par un programme Fortran de simulation des essais de compression et d'extension triaxiales (développé au CERMES), sur du grès rouge de Wildmoor sec puis saturé au pétrole, en comparant les résultats théoriques obtenus avec les données expérimentales (Sulem et al [1995a]). La limite de validité de notre modèle correspond à la perte d'homogénéité des déformations, la technique de détection de ce point a été présentée dans le paragraphe III.3.5. D'autre part notre modèle a été validé sur des essais biaxiaux (Vardoulakis et al [1993]) et modèles réduits de cylindres creux (Papamichos et al [1996a])

### III.5.1 Simulation des essais de compression sur le grès sec

#### III.5.1.1 Essais non confinés

La simulation des essais non confinés est représentée sur la figure 3.17. Nous observons qu'à cause de l'instabilité structurelle inhérente aux essais non confinés, l'échantillon rompt assez tôt à 75% du pic de résistance calculé à partir des essais confinés. Pour l'essai non confiné le module élastique de cisaillement varie entre 848 MPa et 1463 MPa (voir tableau annexe B), on remarque que c'est le modèle élastique linéaire, avec une valeur moyenne du module élastique de cisaillement à 1250 MPa, qui donne la meilleure simulation

Une remarque similaire peut être faite à propos de l'essai à bas confinement (0.4 MPa). Bien que dans ce cas la mesure du pic de résistance ne diffère que de 5% par rapport à la valeur théorique (figure 3.18).

#### III.5.1.2 Essais confinés

Comme on le voit sur les figures 3.19, 3.20, 3.21 et 3.22 le modèle complet reproduit très bien les pentes des cycles des différents essais et les pics de résistance. Le modèle simplifié reproduit correctement les données des essais avec confinement intermédiaire (1.4 MPa et 3.5 MPa), par contre il surestime le pic de résistance pour les essais fortement confinés (6.9 MPa

et 10.3 MPa) car la non-dépendance en pression ne tient pas compte de la diminution de l'angle de frottement avec la pression moyenne.

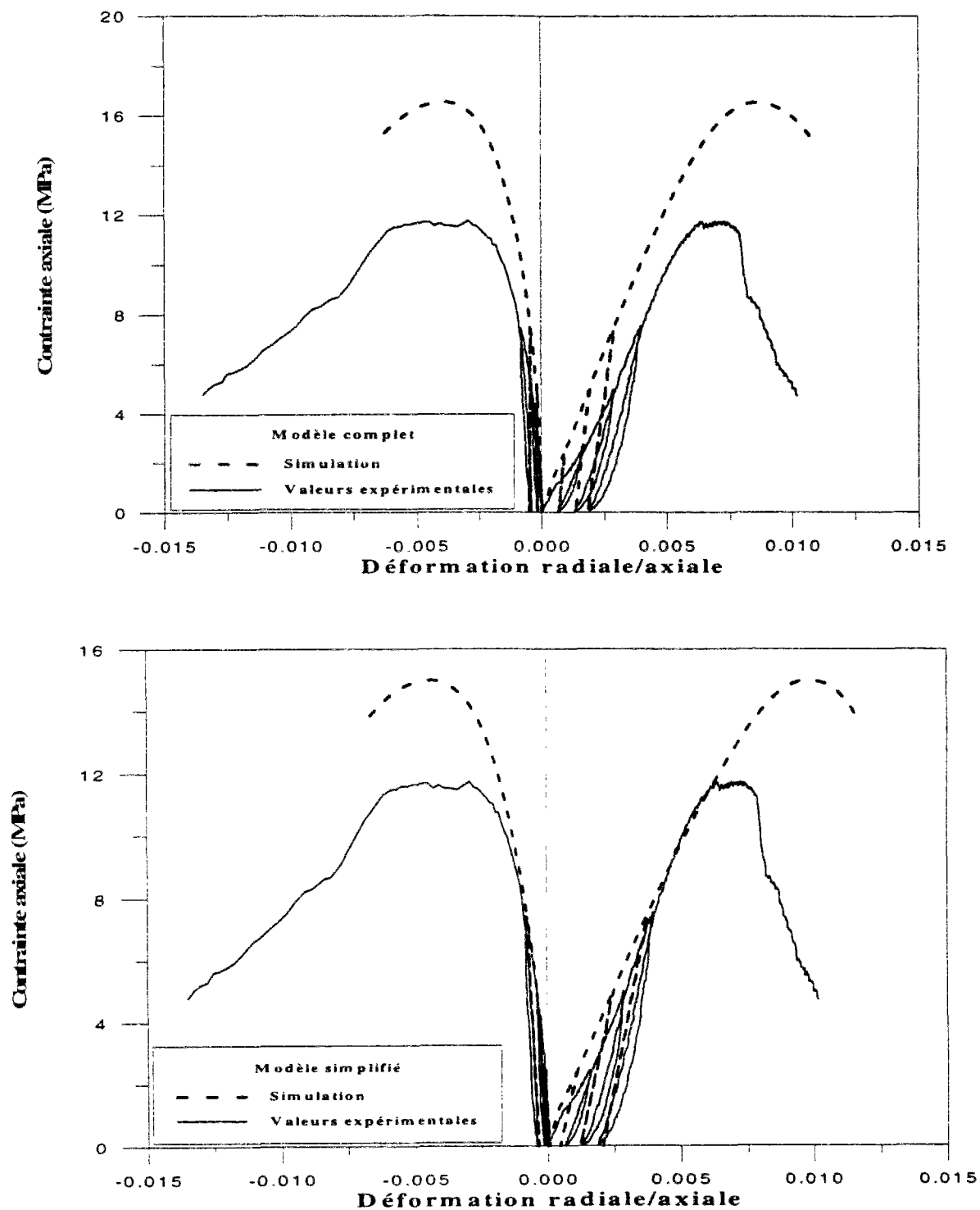


Figure 3.17: Simulation d'un essai de compression uniaxial à partir des modèles complet et simplifié avec  $G=1250$  MPa

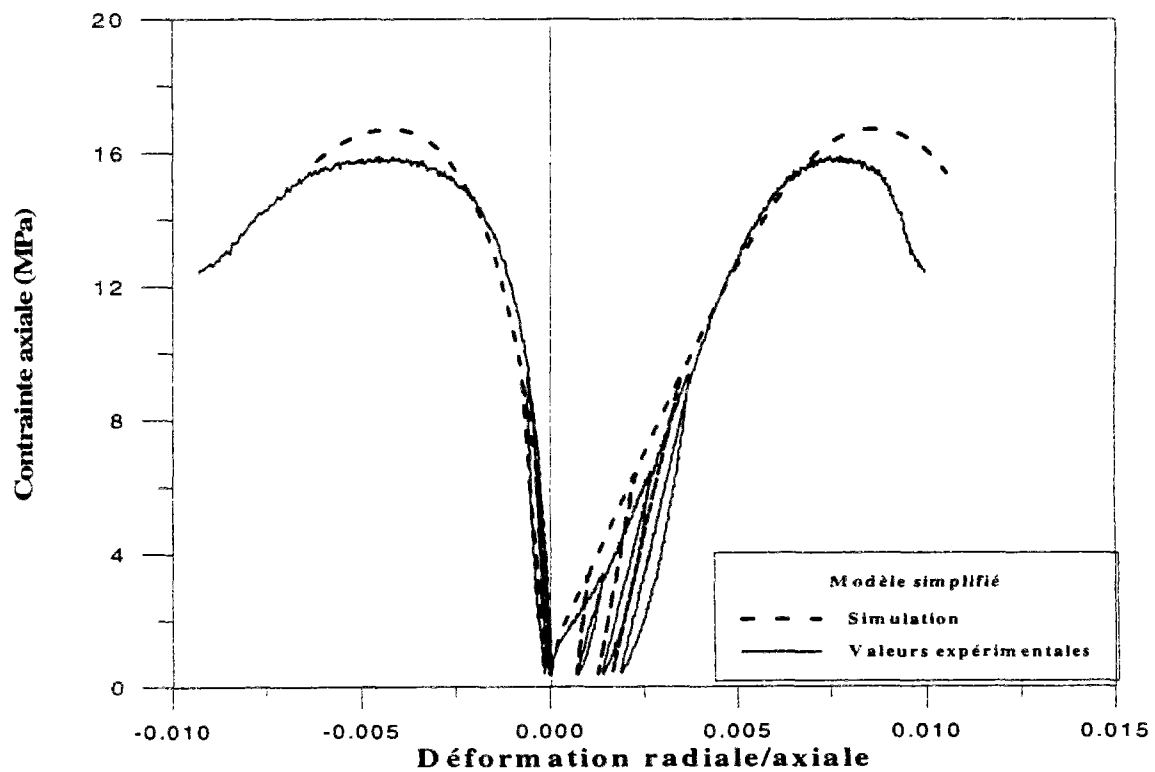
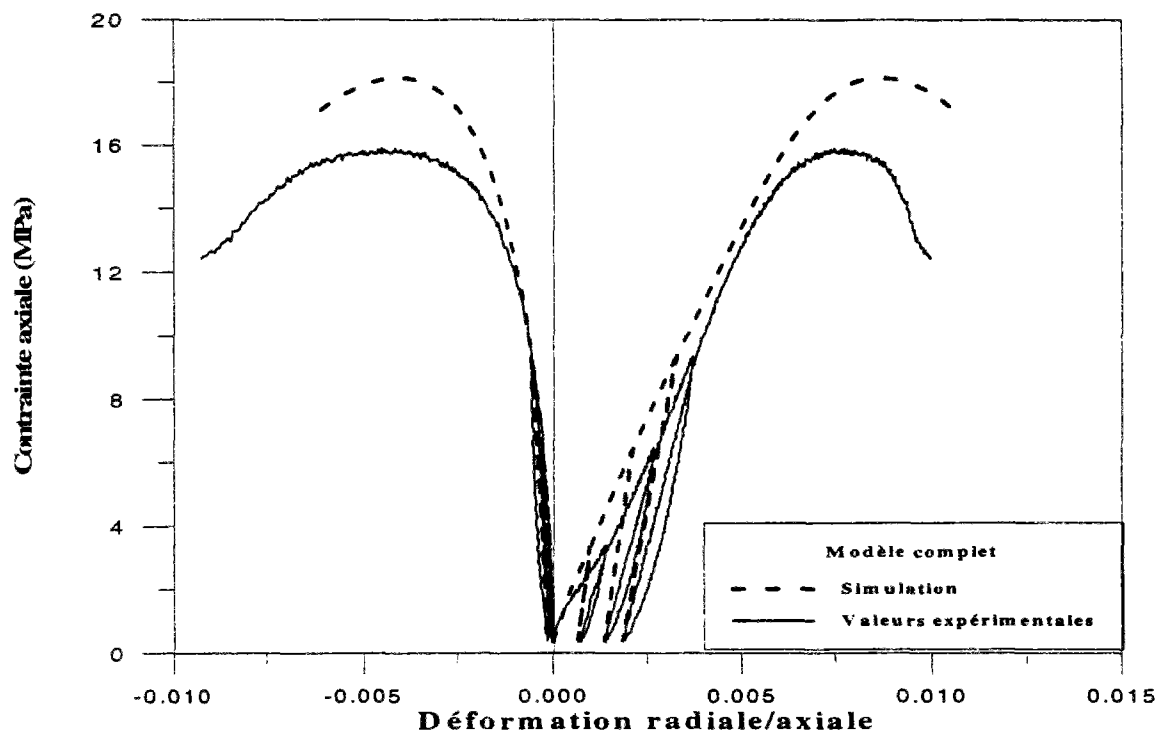


Figure 3.18: Simulation d'un essai de compression confiné à 0.4 MPa à partir des modèles complet et simplifié avec  $G=1825$  MPa

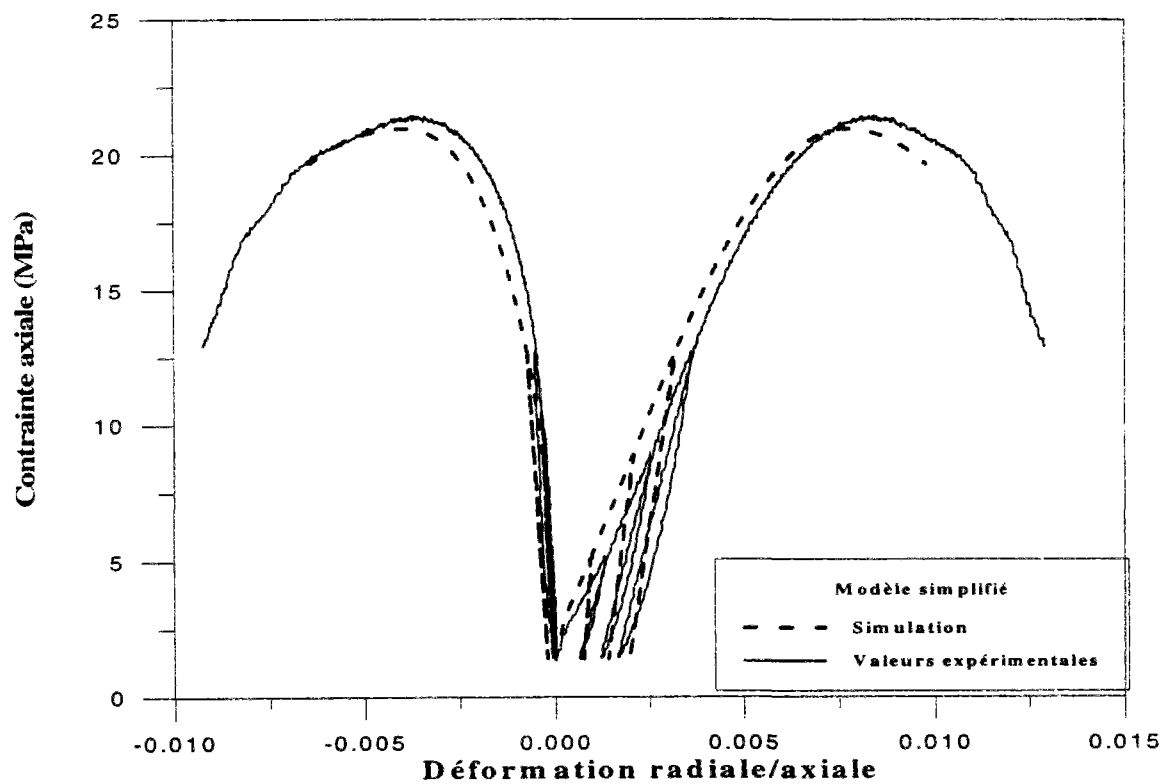
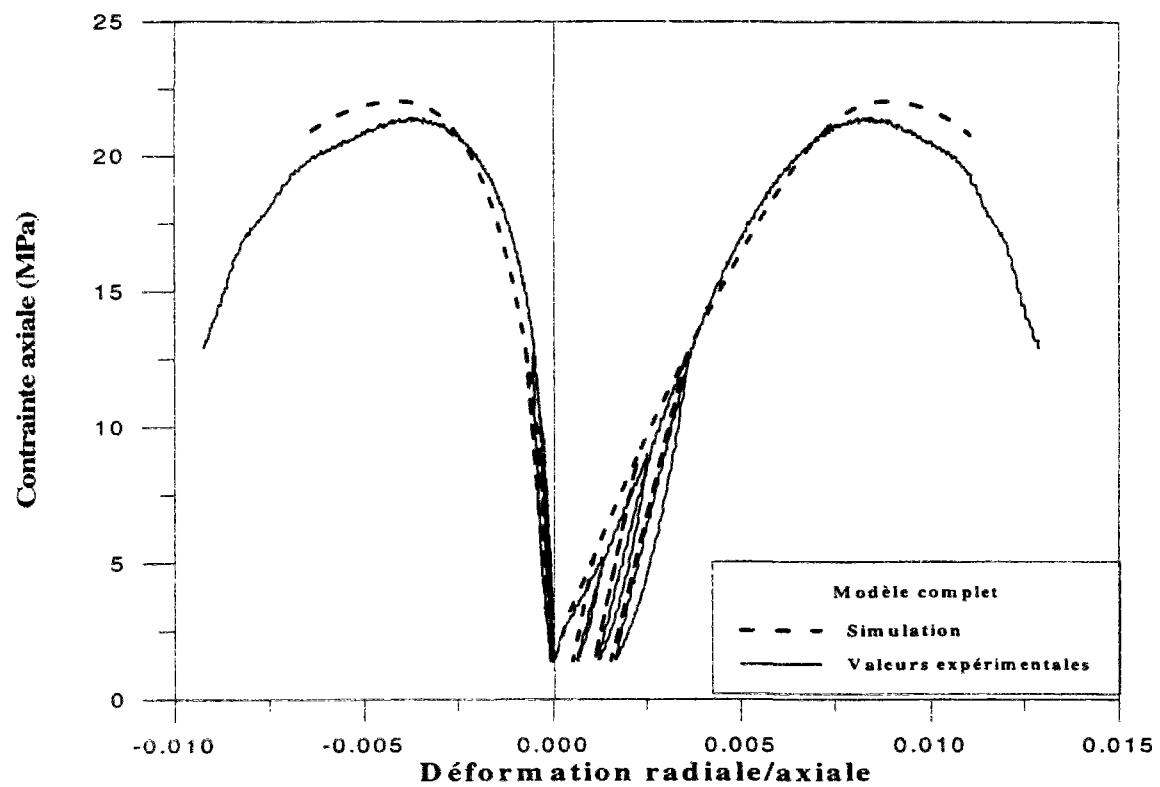


Figure 3.19: Simulation d'un essai de compression confiné à 1.4 MPa à partir des modèles complet et simplifié avec  $G=2840$  MPa



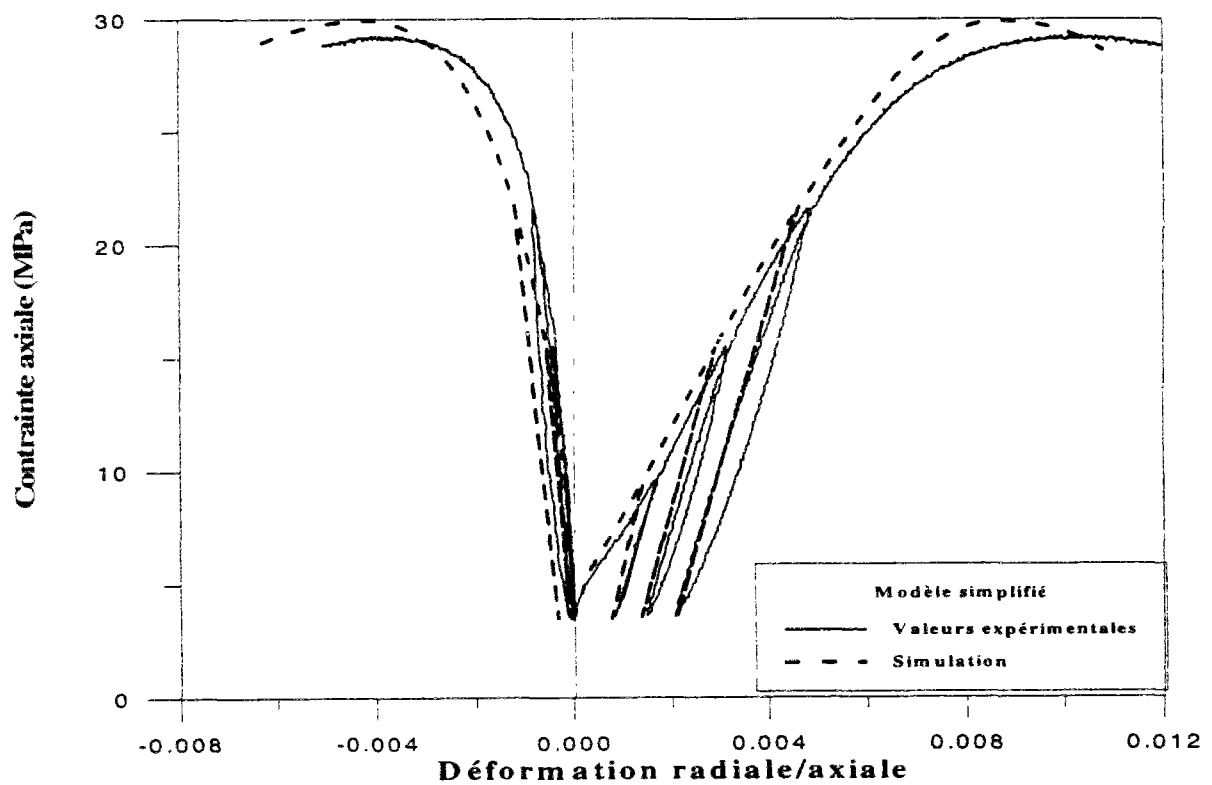
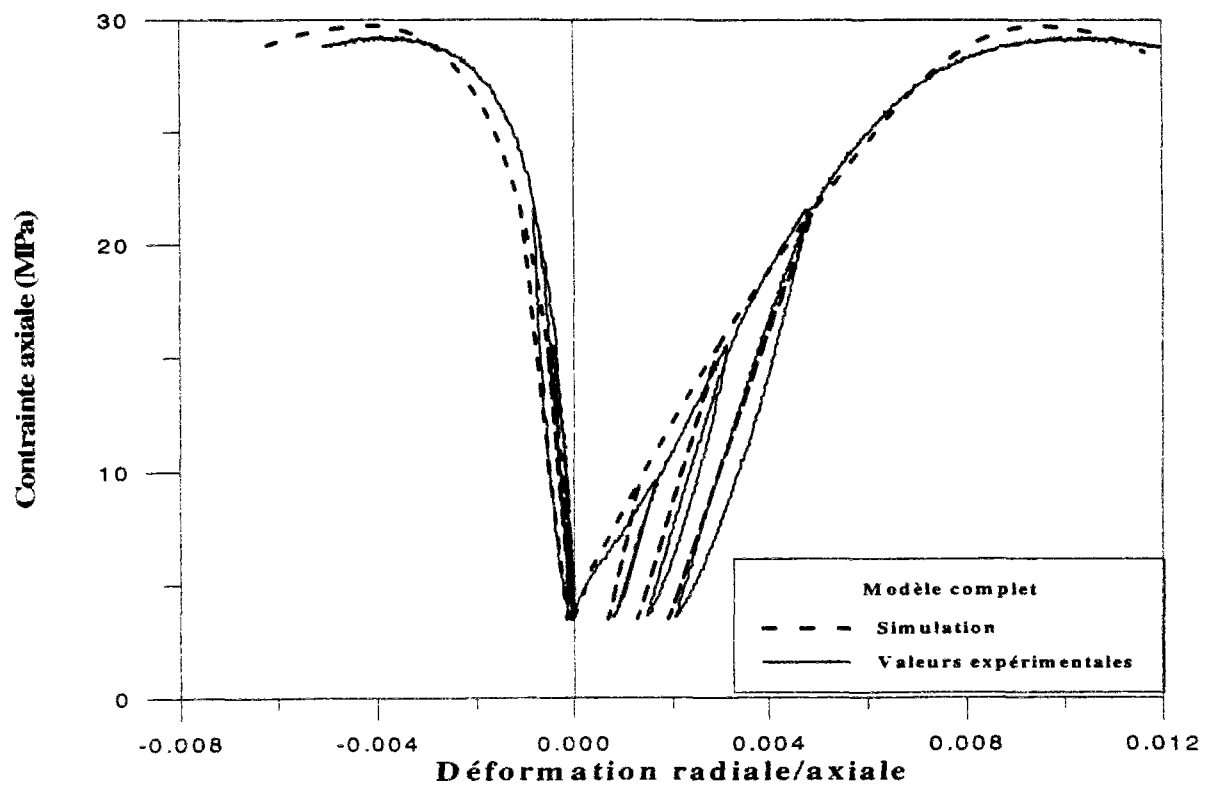


Figure 3.20: Simulation d'un essai de compression confiné à 3.5 MPa à partir des modèles complet et simplifié avec  $G=2840$  MPa

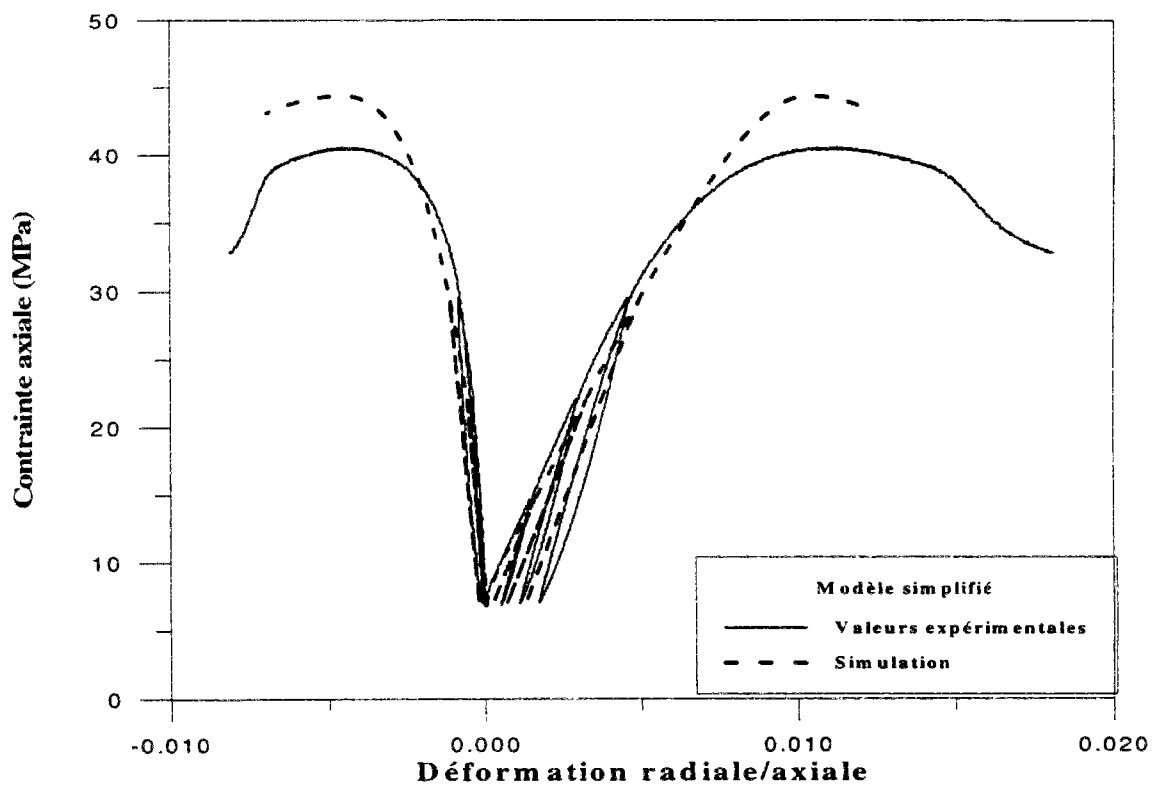
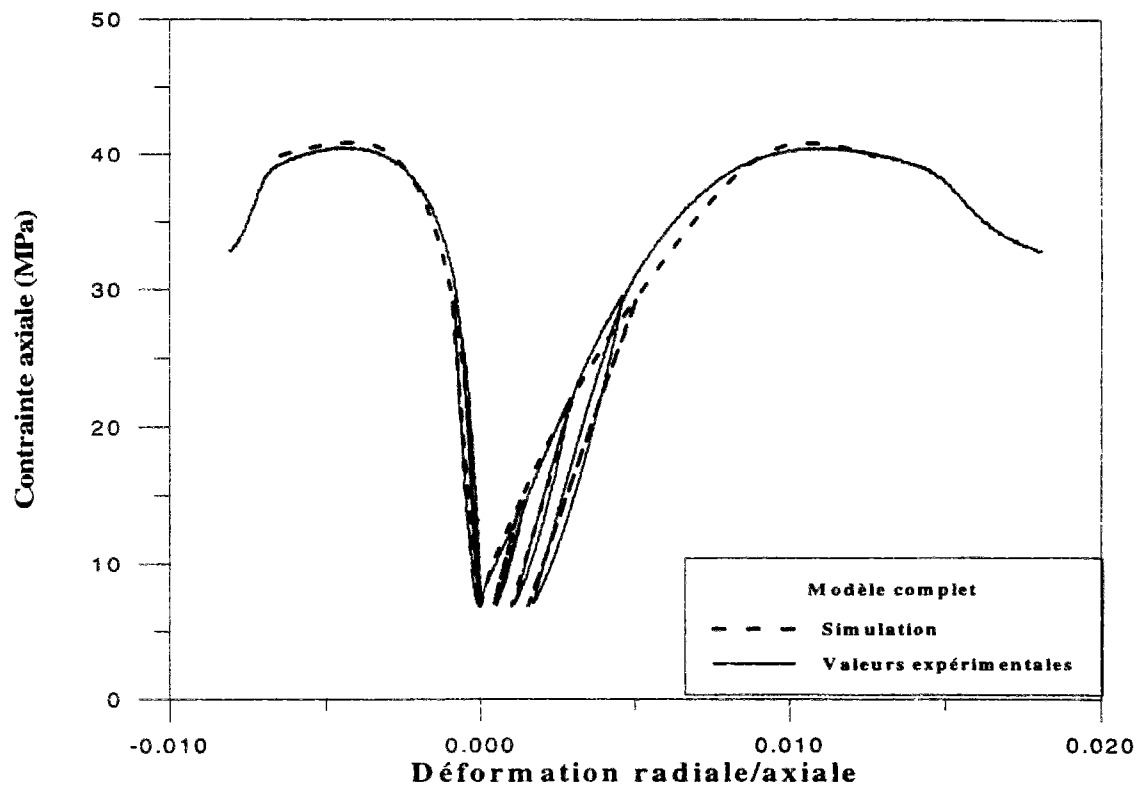


Figure 3.21: Simulation d'un essai de compression confiné à 6.9 MPa à partir des modèles complet et simplifié avec  $G=2840$  MPa

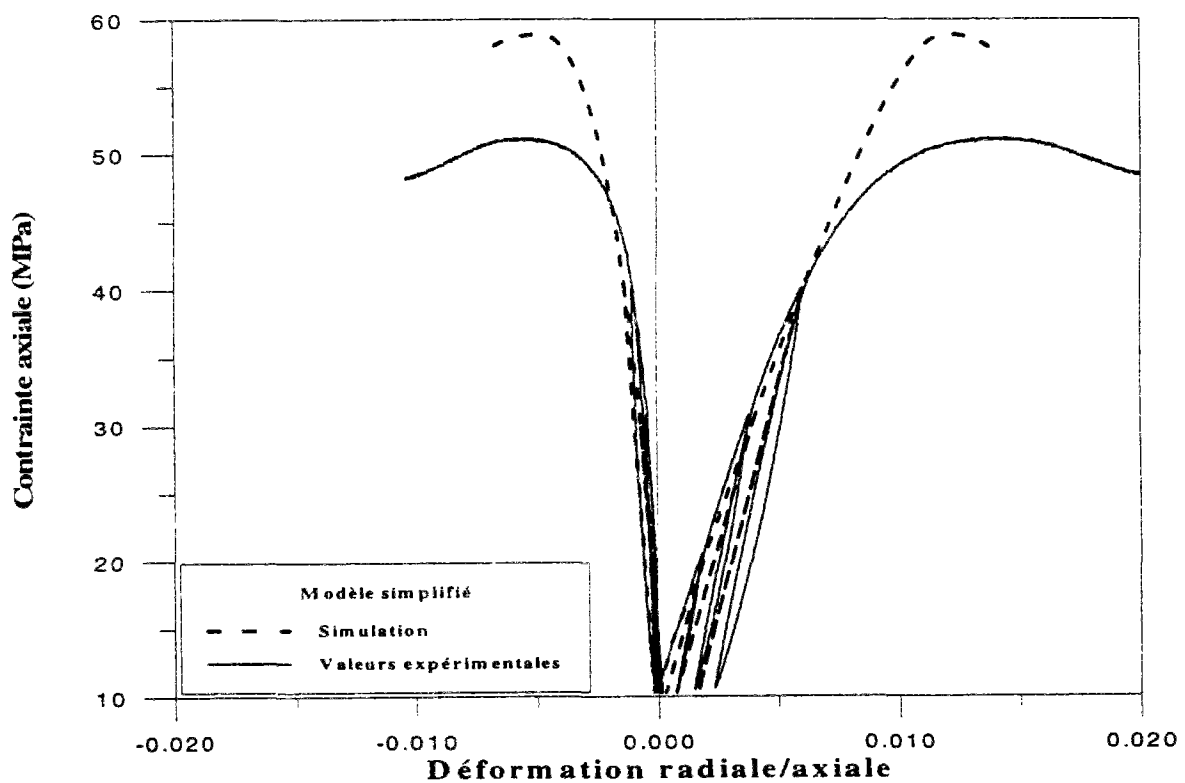
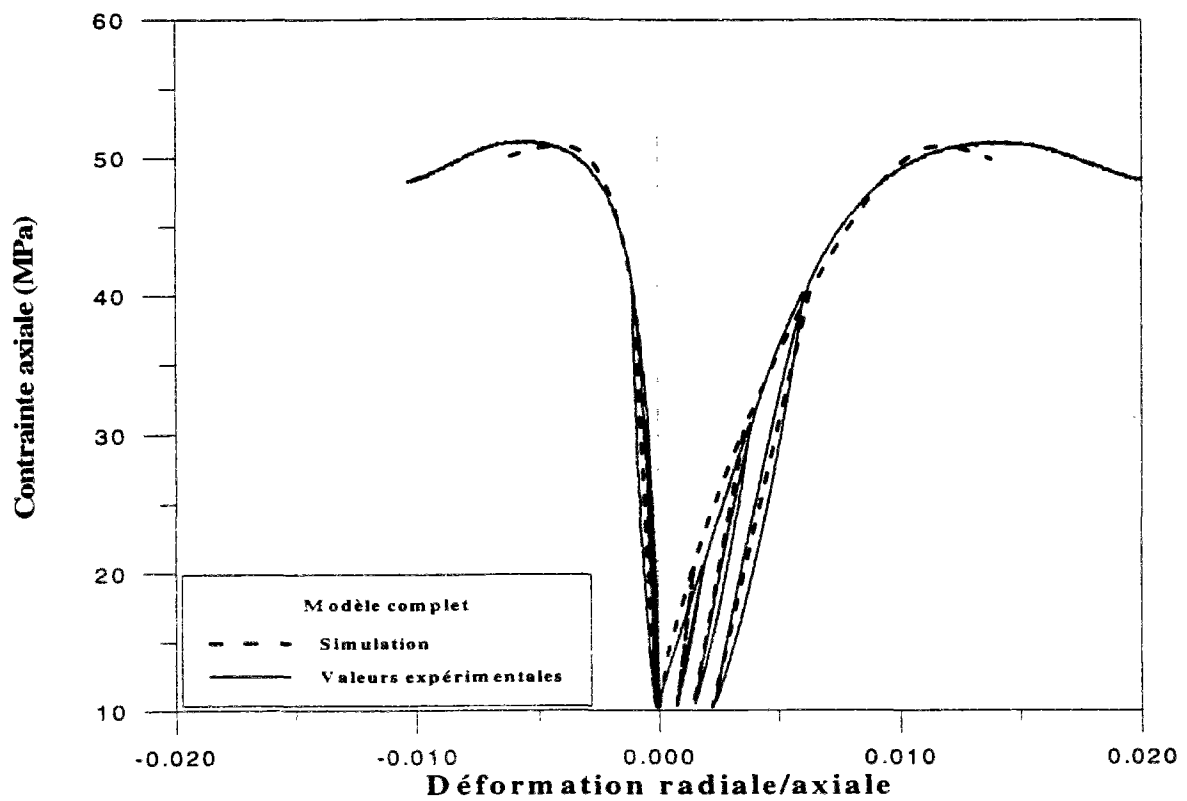
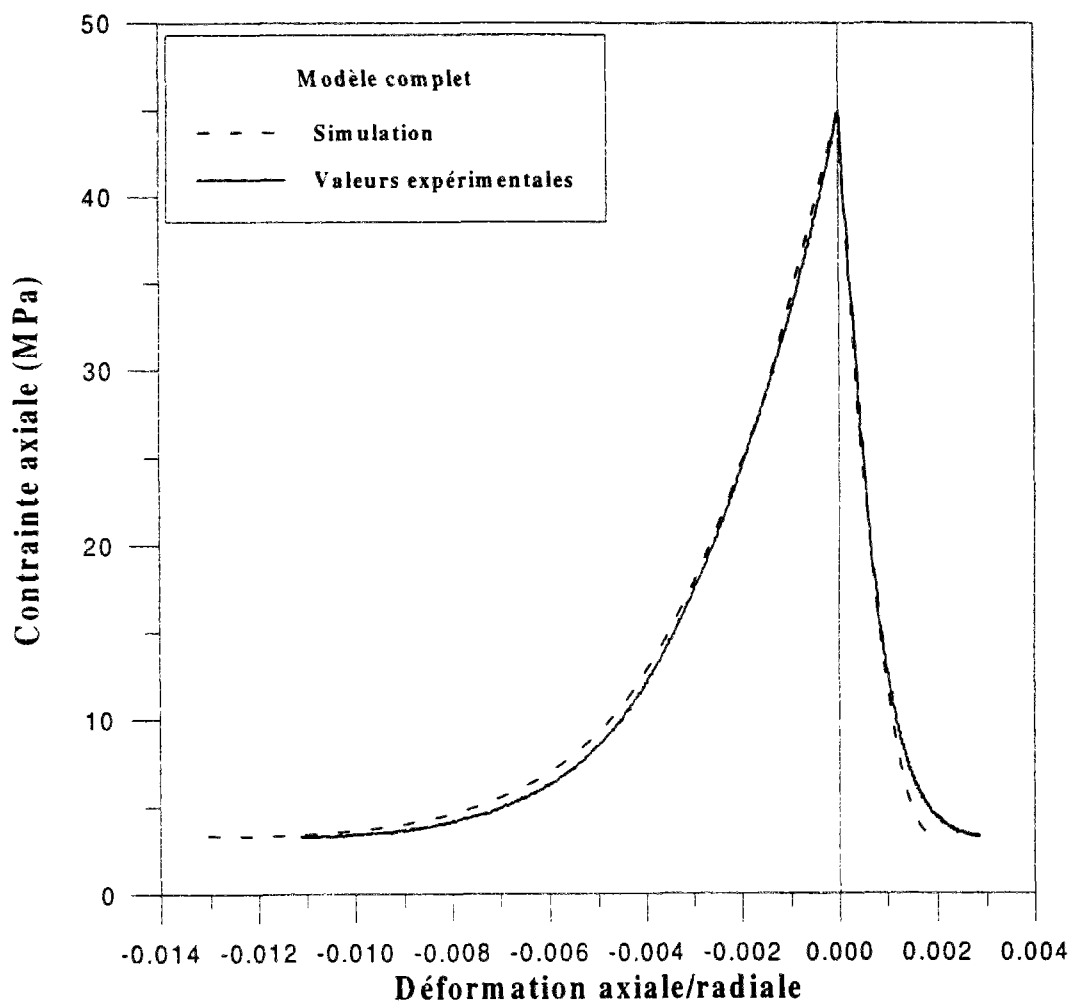


Figure 3.22: Simulation d'un essai de compression confiné à 10.3 MPa à partir des modèles complet et simplifié avec  $G=2840$  MPa

### III.5.2 Simulation des essais d'extension sur le grès sec

La simulation des essais d'extension avec le modèle complet et le modèle simplifié est représentée sur les figures 3.23 et 3.24. Comme on le voit sur ces figures la simulation à partir du modèle complet reproduit très bien les données expérimentales puisqu'on remarque que le modèle complet reproduit très bien l'allure des courbes efforts-déformations ainsi que les pics de résistance en extension de la roche à différentes pressions de confinement



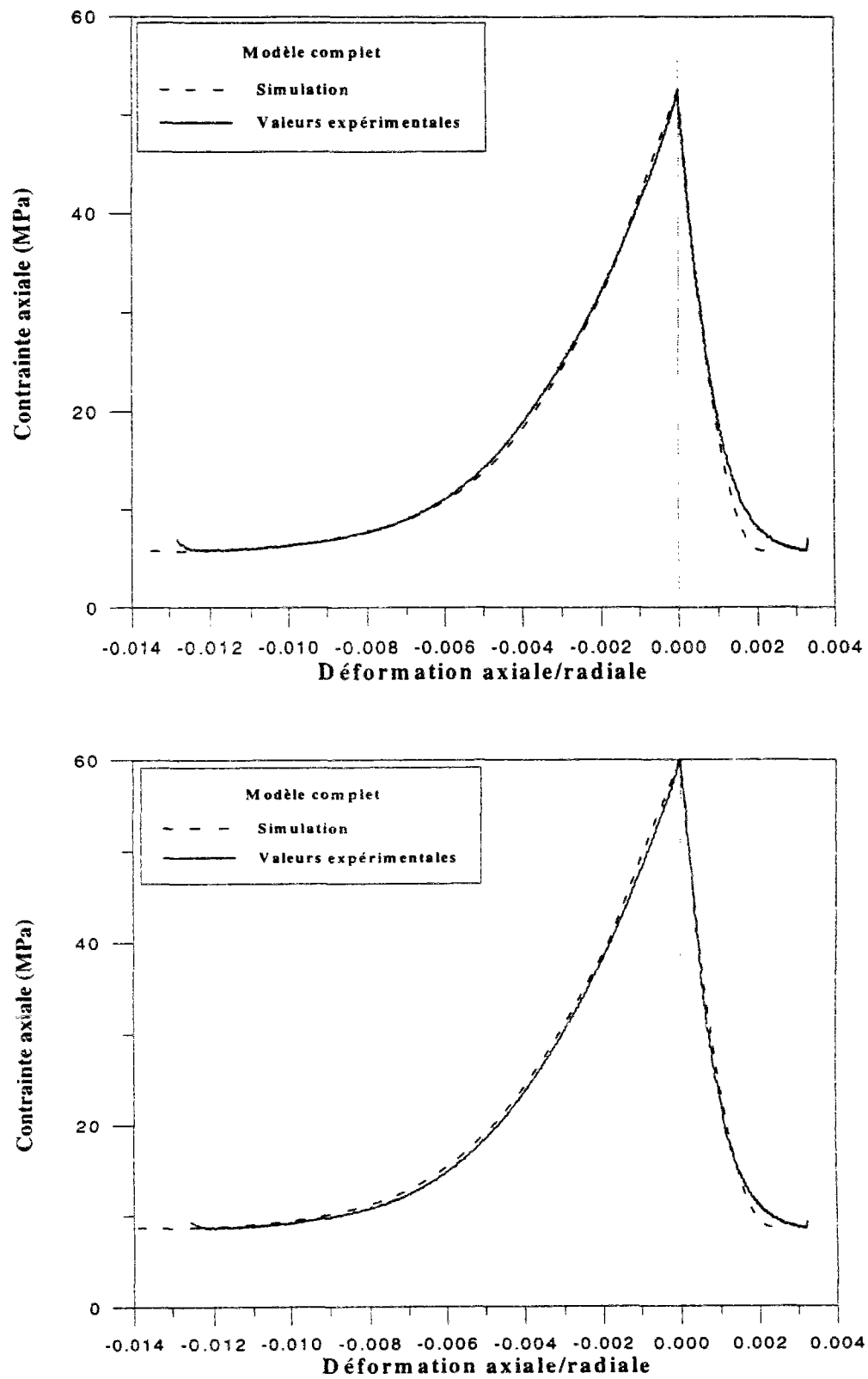
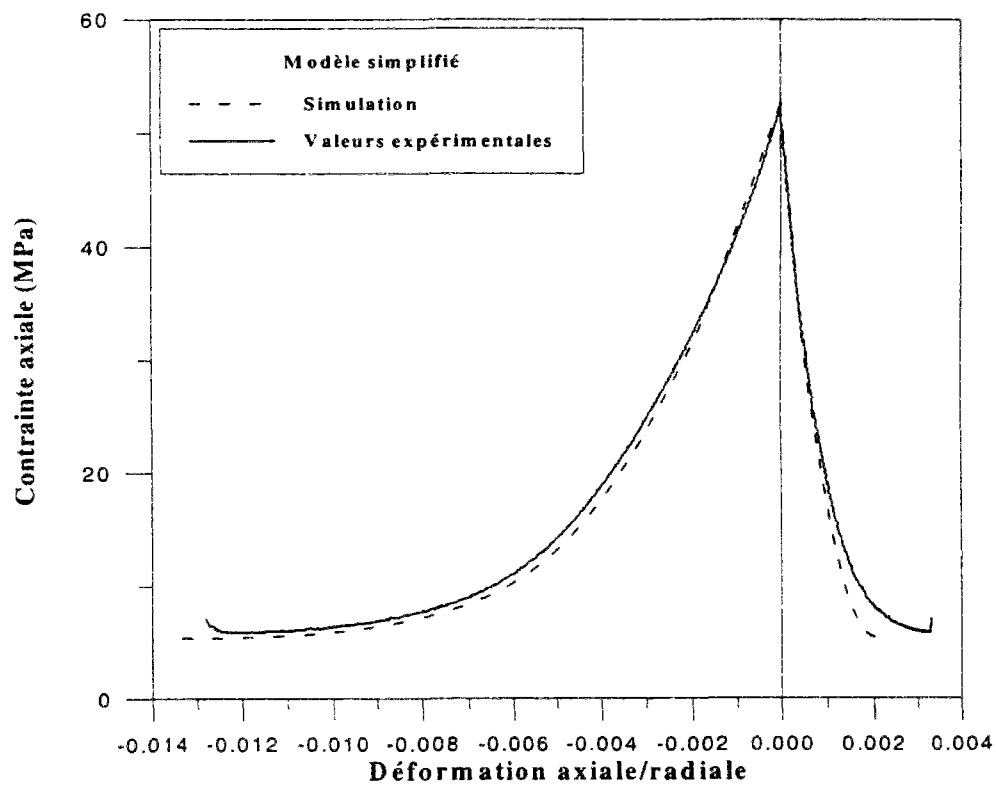
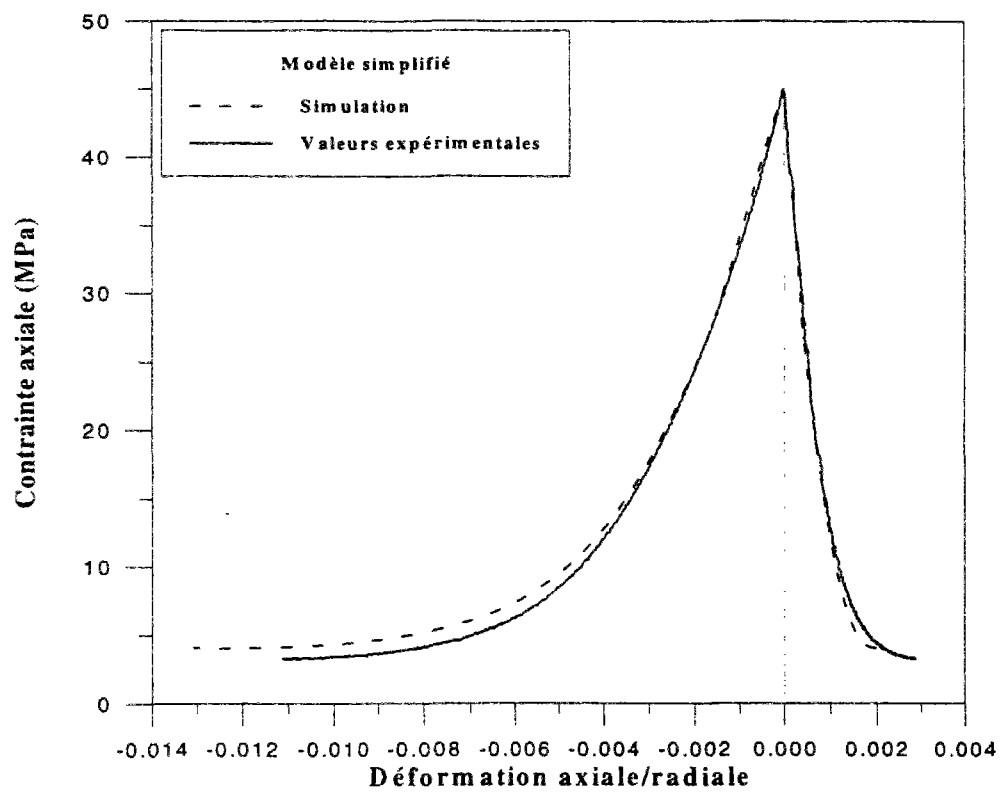


Figure 3.23: Simulation d'essais d'extension confinés avec le modèle complet aux pressions de confinement 45, 52.5 et 60 MPa



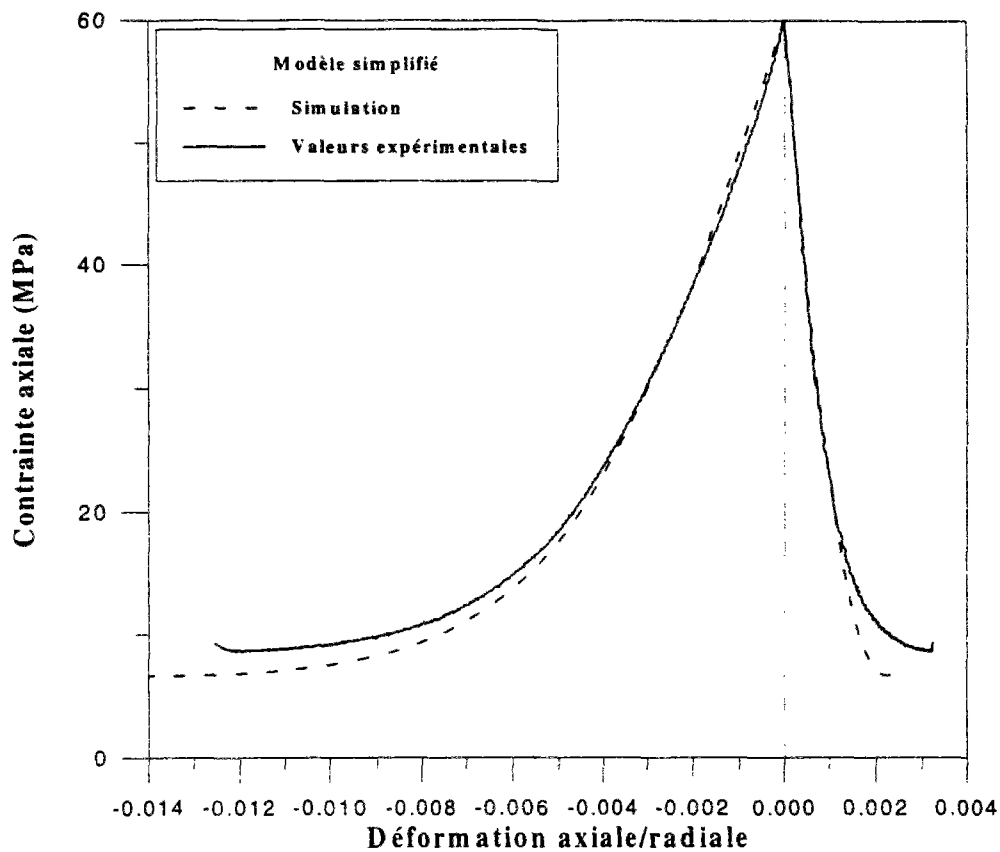


Figure 3.24: Simulation d'essais d'extension confinés avec le modèle simplifié aux pressions de confinement 45, 52.5 et 60 MPa

### III.5.3 Simulation d'essais de compression cycliques sur le grès saturé au pétrole

En prévision de l'application de notre modèle à l'étude de la stabilité d'un forage pétrolier en phase de creusement et de production, des essais de compression triaxiale avec cycles de charge-décharge à 0.4 et 3.5 Mpa ont été effectués pour examiner l'influence de la saturation en pétrole de la roche sur les propriétés mécaniques du grès rouge de Wildmoor.

Sur la figure 3.25, on remarque que la saturation en pétrole n'a pas d'influence significative sur le module élastique de cisaillement.

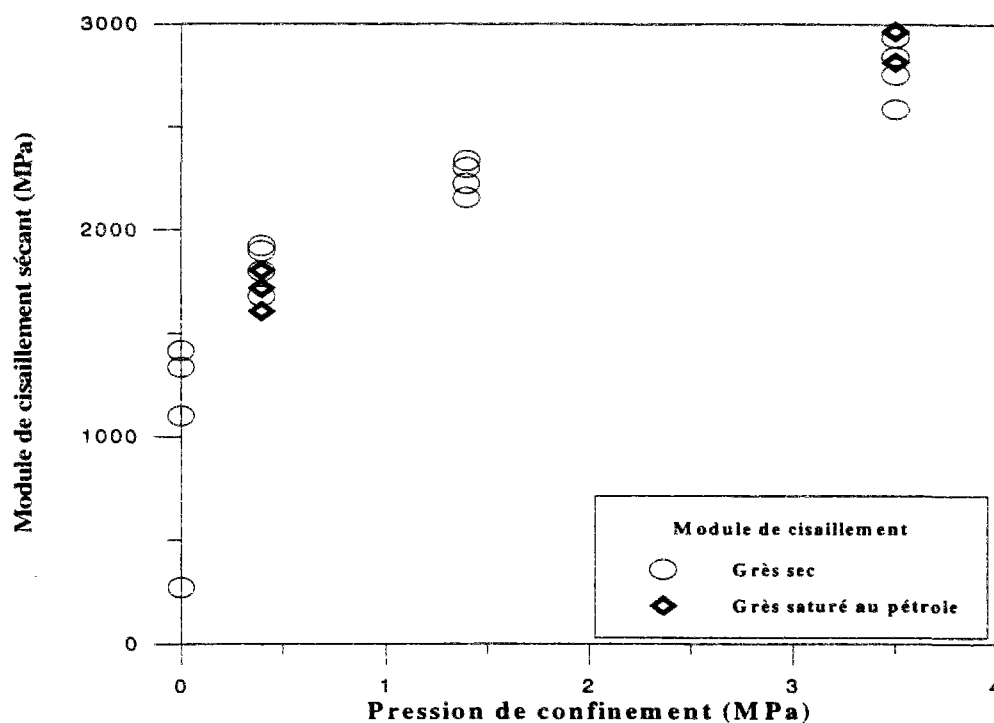


Figure 3.25: Effet de la saturation au pétrole sur les propriétés élastiques du grès de Wildmoor

Quant aux propriétés plastiques, nous avons remarqué que ni le coefficient de frottement ni la cohésion du matériau ne sont affectés significativement par la saturation au pétrole, les résultats sont résumés dans le tableau suivant

	Matériau sec	Matériau saturé au pétrole
module élastique de cisaillement moyen (MPa)	<b>2835.1</b>	<b>2263.5</b>
coefficient de Poisson moyen	<b>0.19</b>	<b>0.21</b>
cohésion du matériau (MPa)	<b>4.14</b>	<b>4.05</b>
angle de frottement (°)	<b>37.4°</b>	<b>38.9°</b>

Les résultats des simulations des essais de compression triaxiale cyclique, sur le grès rouge de Wildmoor saturé au pétrole, sont représentés sur la figure 3.26. On remarque que pour des pressions de confinement peu élevées (0.4 et 3.5 MPa) le modèle simplifié donne des résultats satisfaisants.



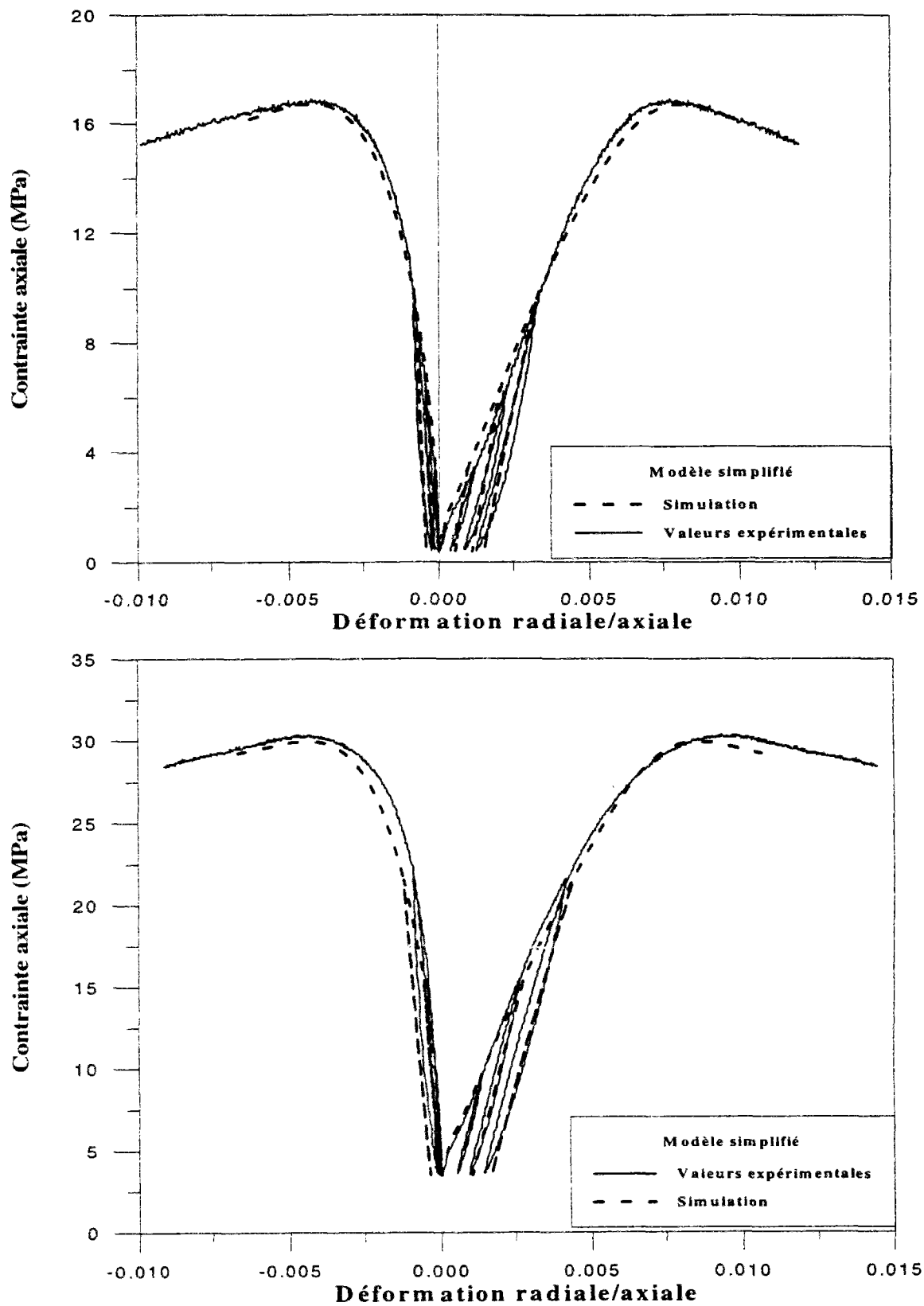


Figure 3.26: Simulation d'essais de compression confinés à 0.4 MPa et 3.5 MPa pour le grès saturé au pétrole à partir du modèle simplifié avec respectivement  $G=1825$  MPa et  $G=2840$  MPa

### III.6 Conclusion

L'étude présentée dans ce troisième chapitre concerne la caractérisation du comportement mécanique sous sollicitations triaxiales (compression et extension) du grès rouge de Wildmoor. Les réponses obtenues dans les essais triaxiaux montrent une non linéarité précoce de la déformation latérale que l'on peut attribuer à un développement orienté des microfissures.

Afin de mettre en évidence l'endommagement du grès rouge de Wildmoor, les essais sous compression uniaxiale et triaxiale ont été effectués avec cycles de chargement-déchargement. L'approche adoptée pour caractériser l'endommagement repose sur la mesure des paramètres élastiques. Les résultats obtenus montrent que l'endommagement axial reste faible tandis que l'endommagement latéral progresse significativement notamment au début du chargement. Nous avons tenu compte de cet endommagement dans la loi de comportement ce qui permettra de décrire correctement la localisation des déformations dans le grès rouge de Wildmoor.

Enfin la simulation du modèle hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire (modèle complet) a donné des résultats satisfaisants en ce qui concerne les essais effectués à haute pression de confinement, quant à la simulation du modèle simplifié elle nous donne des bons résultats pour les essais à pression de confinement nulle ou peu élevée. Nous avons également remarqué que la saturation du grès de Wildmoor au pétrole n'affecte pas ses caractéristiques élasto-plastiques.



## Chapitre IV

# Phénomènes de bifurcation dans le grès rouge de Wildmoor

### IV.1 Introduction

Les chapitre II et III ont été consacrés à la caractérisation du comportement mécanique du grès rouge de Wildmoor sous divers chemins de sollicitation (compression uniaxiale et triaxiale avec cycles de charge-décharge, extension triaxiale). Nous avons particulièrement insisté sur la non linéarité des réponses mécaniques, interprétée comme la conséquence directe de l'endommagement par microfissuration du matériau. La dilatance qui en résulte, est apparue comme un indicateur important de l'état de déformation et de l'intensité de cette microfissuration du grès.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différents modes de bifurcation possibles pouvant se développer au cours du chargement d'un échantillon de grès rouge de Wildmoor. Une bifurcation du mode de déformation correspond à un changement du mode de déformation initialement homogène à l'intérieur de l'échantillon pour un mode non-homogène comme la "mise en tonneau", le flambement de l'échantillon ou encore la formation de bandes de cisaillement (figure 1.9). Mathématiquement la bifurcation correspond à la perte d'unicité de la solution des équations qui gouvernent le problème aux limites considéré. L'apparition de ces différents modes de bifurcation dépend des propriétés rhéologiques du matériau, des conditions aux limites comme le frottement aux extrémités et la pression de confinement, de la géométrie (taille et forme) de l'échantillon. Il est important de prédire théoriquement le

point de bifurcation sur le trajet de chargement et de le comparer aux résultats expérimentaux, car au-delà de ce point, les mesures effectuées ne peuvent pas être utilisées directement pour calibrer la loi de comportement puisqu'elles correspondent à une déformation non-homogène de l'échantillon. En particulier on observe une forte dilatance et un fort radoucissement apparents (figure 2.8) qui ne correspondent pas au comportement intrinsèque du matériau mais au comportement post-bifurcation du système mécanique considéré.

Nous nous attacherons à caractériser les deux modes de bifurcation localisée (formation de bandes de cisaillement) et diffuse (mise en tonneau et flambement) à partir d'essais de compression triaxiale et uniaxiale; les résultats obtenus à partir du modèle de comportement complet (hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire) non-coaxial anisotrope seront comparés avec ceux obtenus à partir du modèle simplifié non-coaxial anisotrope et pour finir avec les résultats des observations expérimentales.

## **IV.2 Analyse de la localisation des déformations en bandes de cisaillement**

### **IV.2 1 Lois de comportement incrémentales modifiées**

Dans ce paragraphe nous allons introduire les notions de non-coaxialité et d'anisotropie induite par les contraintes (Papamichos [1992], Sulem et al [1993]) et observer leur influence sur la théorie d'écoulement classique que ce soit pour le modèle simplifié ou le modèle hyperélastoplastique avec endommagement (modèle complet). Ces lois de comportement modifiées seront jugées quant à leur capacité à prédire correctement la localisation en bandes de cisaillement.

#### **IV.2.1.1 Non-Coaxialité**

Dans le but d'avoir de meilleures prédictions pour l'étude de la localisation des déformations en bandes de cisaillement d'essais en compression et extension triaxiales, il est préférable d'abandonner le concept classique de loi d'écoulement plastique coaxiale pour s'intéresser aux lois d'écoulement hypoplastiques. Papamichos [1992] et Papamichos et Vardoulakis [1995]

ont proposé un modèle élastoplastique non-coaxial cohérent que nous appliquerons au modèle élastoplastique simplifié puis à notre modèle complet.

Dans la théorie de l'écoulement plastique classique le tenseur des vitesses de déformation plastique a les même axes principaux que le tenseur des contraintes de Cauchy. Cette loi d'écoulement peut être modifiée en ajoutant au terme coaxial classique un terme non-coaxial.

#### IV.2.1.1.1 Modèle simplifié

On introduit le tenseur des contraintes 'réduit'  $\tau_{ij}$  qui modifie la position de la surface de plasticité et du potentiel plastique dans l'espace des contraintes (figure 4.1) tel que

$$F=F(\tau_{ij}, \Psi) ; Q=Q(\tau_{ij}, \Psi) \quad 4.2.1$$

Cette théorie est basée sur le fait que la loi d'écoulement peut être modifiée en supposant que le tenseur des vitesses de déformation plastique est décomposable en une partie parallèle (coaxiale) et une partie perpendiculaire (normale) au tenseur des contraintes réduit (figure 4.2)

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \quad 4.2.2$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{pn} \quad 4.2.3$$

où  $\alpha_{ij}$  est le tenseur des contraintes relatif. Le tenseur des vitesses de déformation plastique coaxial contribue à la dissipation locale, par contre le tenseur des vitesses de déformation plastique normal est neutre. Cela met en relief le fait que la vitesse de déformation normale est irréversible comme l'ont souligné Rudnicki et Rice [1975].

Par analogie avec le tenseur des contraintes de Cauchy, on définit pour le tenseur des contraintes réduit, le déviateur des contraintes  $t_{ij}$  et l'intensité du déviateur des contraintes  $\bar{\tau}$

$$\tau_{ij} = t_{ij} + \tau_{kk} \delta_{ij} / 3 \quad 4.2.4$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{(t_{ij}t_{ij}/2)} \quad 4.2.5$$

Comme pour la théorie de l'écoulement classique, le tenseur des vitesses de déformation plastique coaxial est représenté par une loi d'écoulement non-associée coaxiale de la forme

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pc} = \dot{\Psi} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{ij}} \quad 4.2.6$$

où  $Q$  est le potentiel plastique et  $\dot{\Psi} > 0$  est le taux du paramètre d'écrouissage. Le tenseur des vitesses de déformation plastique normal est représenté par une loi d'écoulement non-coaxiale (Rudnicki et Rice [1975], Stören et Rice [1975]) de la forme

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pn} = \dot{h}_1 / h_1 ; \dot{h}_1 = \dot{t}_{ij} - \frac{t_{ij}t_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{t}_{kl} \quad 4.2.7$$

où  $h_1$  est le taux d'écrouissage dans la direction normale au tenseur des contraintes réduit  $\tau_{ij}$ .

Le modèle de plasticité non-coaxial est complètement déterminé en considérant la loi d'évolution suivante pour le tenseur des contraintes relatif

$$\dot{\alpha}_{ij} = c(\Psi) \dot{\varepsilon}_{ij}^{pn} \quad 4.2.8$$

où  $c(\Psi)$  est une fonction du paramètre d'écrouissage. Dans ce cas la condition de consistance de Prager s'écrit

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} \dot{\tau}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\alpha}_{ij}) + \frac{\partial F}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0 \quad 4.2.9$$

Notons que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}}\right)^e \alpha_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}}\right)^e C_{ijkl}^{e, pn} \dot{\varepsilon}_{kl} = 0 \quad 4.2.10$$

car  $\alpha_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}^{pn}$  sont perpendiculaires à  $\tau_{ij}$ . On peut en déduire  $\dot{\Psi}$  à partir de l'équation 4.2.9

$$\dot{\Psi} = \frac{\langle 1 \rangle}{H} \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad ; \quad H = \frac{\partial F}{\partial \tau_{ij}} C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \tau_{kl}} \frac{\partial F}{\partial \Psi} \quad 4.2.11$$

la fonction  $\langle 1 \rangle$  étant représentée par l'expression 2.3.10 et  $C_{ijkl}^e$  est donné par la relation 2.2.7.

Le tenseur des vitesses de déformation plastique coaxiale s'écrit donc

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pc} = \frac{\langle 1 \rangle}{H} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{kl}} C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 4.2.12$$

A partir des équations 4.2.2, 4.2.7 et 4.2.8 on peut déterminer l'expression du tenseur des vitesses de déformation plastique normal (perpendiculaire)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pn} = \frac{1}{h_1} N_{ijkl} \dot{\tau}_{kl} = \frac{1}{c+h_1} N_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad 4.2.13$$

où

$$N_{ijkl} = \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{t_{ij} t_{kl}}{\tau} \right] \quad 4.2.14$$

A partir des expressions du tenseur des vitesses de déformation total (équation 2.2.3), des équations de l'élasticité 2.2.6, du tenseur d'élasticité 2.2.7 et des relations 4.2.3 et 4.2.6 on peut déterminer le tenseur des vitesses de déformation plastique non-coaxial



$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pn} = \frac{1}{2G_s + c + h_1} N_{ijrt} C_{rtkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 4.2.15$$

ce qui nous permet d'exprimer le tenseur des vitesses de déformation plastique total en fonction du tenseur des vitesses de déformation total

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \left[ \frac{\langle \lambda \rangle}{H} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{rt}} + \frac{1}{2G_s + c + h_1} N_{ijrt} \right] C_{rtkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 4.2.16$$

Le tenseur des vitesses de contrainte peut être déterminé à partir des équations 2.2.3 et 4.2.16

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 4.2.18$$

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p \quad 4.2.19$$

$$C_{ijkl}^p = C_{ijmn}^e \left[ \frac{\langle \lambda \rangle}{H} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \tau_{rt}} + \frac{1}{2G_s + c + h_1} N_{mnrt} \right] C_{rtkl}^e \quad 4.2.20$$

On remarque d'après l'équation 4.2.20 que la modification apportée à la théorie d'écoulement plastique coaxiale se traduit par l'introduction d'un terme additionnel au tenseur de rigidité plastique, qui exprime le caractère non-coaxial du modèle. Comme conséquence de la loi d'écoulement non-coaxiale 4.2.7, la déformation plastique normale n'est générée que lors de la rotation de la contrainte principale. Pour des chemins de chargement sans rotation de contrainte principale seule la déformation plastique coaxiale est générée, le modèle est ainsi réduit à une loi d'écoulement coaxiale ordinaire.

A partir de l'équation 4.2.18 on peut expliciter les composantes de la dérivée au sens de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy pour le modèle simplifié non-coaxial

$$\begin{cases}
 \dot{\sigma}_{11} = C_{1111}^{ep} \dot{\varepsilon}_{11} + C_{1122}^{ep} \dot{\varepsilon}_{22} + C_{1133}^{ep} \dot{\varepsilon}_{33} \\
 \dot{\sigma}_{22} = C_{2211}^{ep} \dot{\varepsilon}_{11} + C_{2222}^{ep} \dot{\varepsilon}_{22} + C_{2233}^{ep} \dot{\varepsilon}_{33} \\
 \dot{\sigma}_{33} = C_{3311}^{ep} \dot{\varepsilon}_{11} + C_{3322}^{ep} \dot{\varepsilon}_{22} + C_{3333}^{ep} \dot{\varepsilon}_{33} \\
 (\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{33}) = 2G^* (\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{33}) \\
 \dot{\sigma}_{12} = 2G^* \dot{\varepsilon}_{12}; \dot{\sigma}_{13} = 2G^* \dot{\varepsilon}_{13}; \dot{\sigma}_{23} = 2G^* \dot{\varepsilon}_{23}
 \end{cases} \quad 4.2.21$$

On remarque grâce aux équations 4.2.21 que le résultat de l'analyse de bifurcation en bande de cisaillement va sensiblement dépendre du module élastique de cisaillement  $G^*$  ainsi que du coefficient de non-coaxialité  $\xi^*$  avec

$$G^* = \xi^* G_s \quad \text{et} \quad \xi^* = \begin{cases} 1 & \text{pour le modèle coaxial} \\ \frac{c+h_1}{2G_s+c+h_1} & \text{pour le modèle non-coaxial} \end{cases} \quad 4.2.22$$

#### IV.2.1.1.2 Modèle complet

Pour le modèle hyperélastoplastique non-coaxial la loi de comportement peut être représentée par la relation suivante

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{epd} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 4.2.23$$

$$C_{ijkl}^{epd} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^d \quad 4.2.24$$

où  $C_{ijkl}^e$  et  $C_{ijkl}^d$  représentent respectivement les tenseurs d'hyperélastique et d'endommagement, traduisant la dépendance du module de cisaillement  $G_s$  par rapport aux contraintes et à l'intensité du déviateur des déformations (équation 2.4.4). Les tenseurs d'élasticité et d'endommagement sont donnés par les relations 2.2.26 et 2.5.3. Par ailleurs l'hyperélasticité affecte le module d'hypoplasticité  $H$  (équation 4.2.11) qui devient

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau_{ij}} \mathbf{C}_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \tau_{kl}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Psi} + \bar{\mathbf{H}} \quad 4.2.25$$

où  $\bar{\mathbf{H}}$  est donné par la relation 2.5.5. Quant au tenseur d'hypoplasticité, il est représenté par la relation 4.2.20. Pour le modèle complet non-coaxial, comme pour le modèle simplifié non-coaxial, le résultat de l'analyse de bifurcation en bande de cisaillement va sensiblement dépendre du module élastique de cisaillement  $G^*$  ainsi que du coefficient de non-coaxialité  $\xi^*$ .

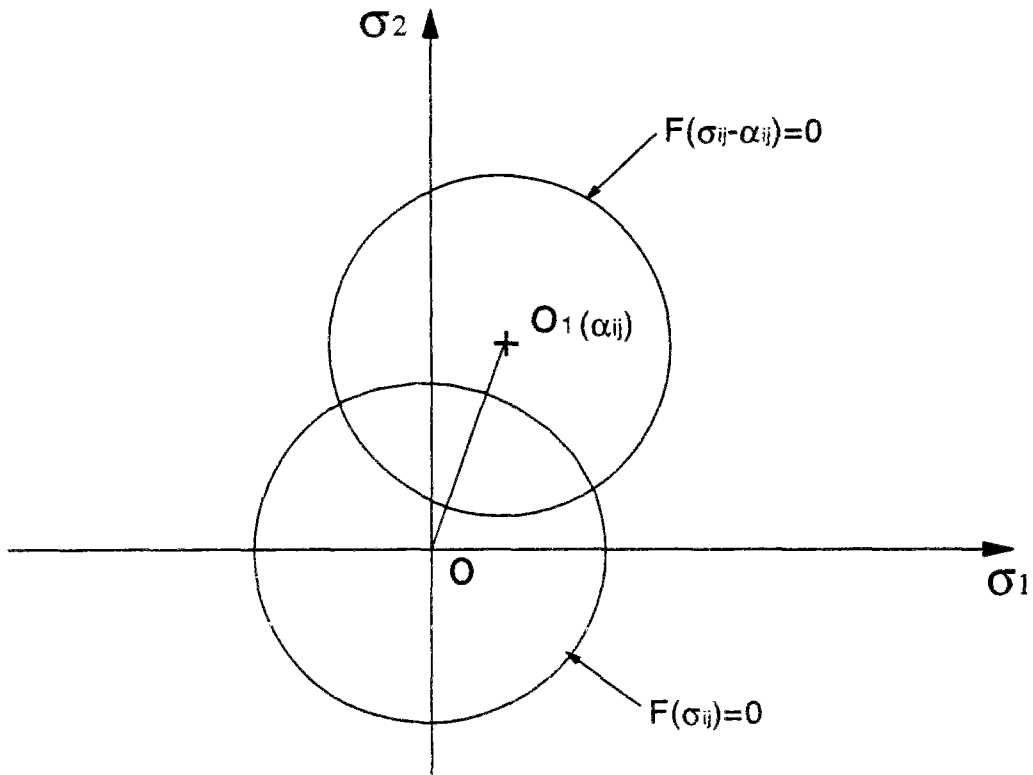


Figure 4.1: Représentation du critère de plasticité dans le plan des contraintes (Papamichos [1992])

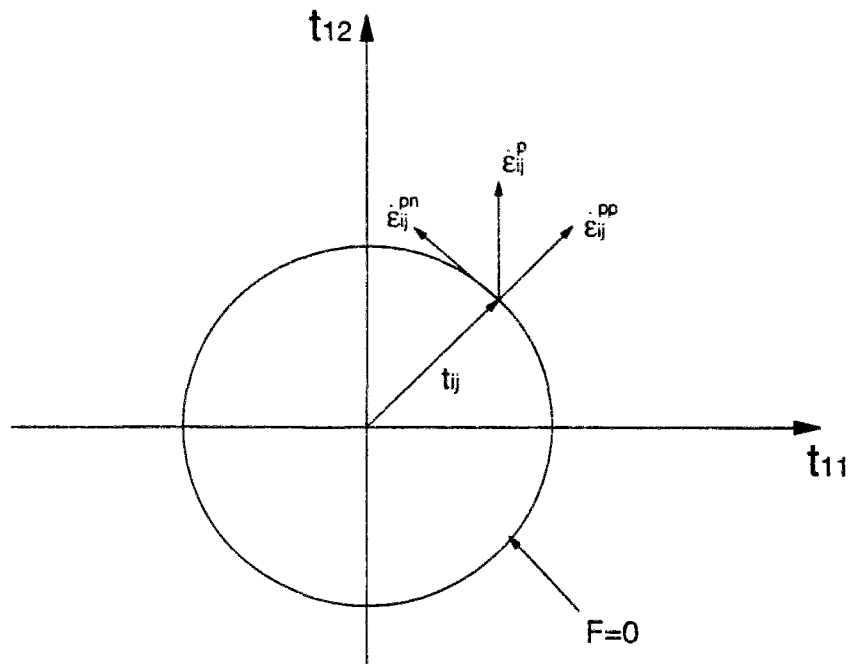


Figure 4.2: Illustration géométrique de la loi d'écoulement coaxiale et non-coaxiale dans le plan déviatorique du tenseur des contraintes réduit (Papamichos [1992])

#### IV.2.1.2 Anisotropie

Dans le but de prendre en compte l'anisotropie induite par les contraintes nous allons modifier la théorie d'écoulement classique de la plasticité. Le modèle de plasticité anisotrope peut être construit en tenant compte d'un terme additionnel non-linéaire coaxial que l'on rajoute au tenseur des vitesses de déformation plastique.

##### IV.2.1.2.1 Modèle simplifié

Comme l'ont suggéré Vardoulakis et Graf [1985], nous allons tenir compte de l'anisotropie induite par les contraintes en introduisant un terme additionnel au tenseur des vitesses de déformation plastique qui devient

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2(q-p)h_2} (n_{kl}n_{kl})^{1/2} m_{ij} \quad 4.2.26$$

avec

$$n_{ij} = \dot{s}_{ij} - m_{kl} \dot{s}_{kl} m_{ij} = \dot{s}_{ij} - s_{ij} \frac{\dot{T}}{T} \quad \text{et} \quad n_{ij} m_{ij} = 0 \quad 4.2.27$$

où  $s_{ij}$  est le tenseur déviateur des contraintes et  $T$  l'intensité du déviateur des contraintes donnée par la relation 2.3.17. Les tenseurs  $n_{ij}$  et  $m_{ij}$  sont représentés sur la figure 4.3 et  $h_2$  représente un module d'écrouissage additionnel.

A partir de la relation 4.2.26 et des équations de l'élasticité 2.2.6 nous pouvons écrire la loi de comportement pour le modèle simplifié anisotrope

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^{epa} \epsilon_{kl} \quad 4.2.28$$

$$C_{ijkl}^{epa} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p \pm C_{ijkl}^a \quad 4.2.29$$

où  $C_{ijkl}^e$  et  $C_{ijkl}^p$  représentent les tenseurs de rigidité élastoplastique et sont respectivement donnés par les relations 2.2.7 et 2.3.14. Nous avons un signe (+) devant le tenseur d'anisotropie  $C_{ijkl}^a$  lorsque la contrainte de cisaillement  $\dot{\sigma}_{13} > 0$  et un signe (-) dans le cas contraire. Le tenseur d'anisotropie est quant à lui donné par la relation suivante

$$C_{ijkl}^a = \frac{1}{(q-p)h_2} \left( \frac{s_{ij}}{T} - \frac{1}{H} \left( \frac{s_{ij}}{T} + \alpha d \delta_{ij} \right) \right) C_{13kl}^e \quad 4.2.30$$

le coefficient  $d$  représente la dilatance mobilisée du matériau et  $\alpha$  est donné par la relation 2.2.19.

Le module d'écrouissage additionnel  $h_2$  peut également s'écrire sous la forme

$$h_2 = \frac{h_t}{\chi} \quad \text{et} \quad h_t = \frac{d\mu}{dg^p} \quad 4.2.31$$

où  $h_t$  est le module d'écroûissage tangent,  $\mu$  la fonction de frottement mobilisé et  $\chi$  le coefficient d'anisotropie.

A partir de l'équation 4.2.28 on peut expliciter les composantes de la dérivée au sens de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy pour le modèle simplifié anisotrope

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} = C_{1111}^{epa} \dot{\epsilon}_{11} + C_{1122}^{epa} \dot{\epsilon}_{22} + C_{1133}^{epa} \dot{\epsilon}_{33} + C_{1113}^{epa} \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\sigma}_{22} = C_{2211}^{epa} \dot{\epsilon}_{11} + C_{2222}^{epa} \dot{\epsilon}_{22} + C_{2233}^{epa} \dot{\epsilon}_{33} + C_{2213}^{epa} \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\sigma}_{33} = C_{3311}^{epa} \dot{\epsilon}_{11} + C_{3322}^{epa} \dot{\epsilon}_{22} + C_{3333}^{epa} \dot{\epsilon}_{33} + C_{3313}^{epa} \dot{\epsilon}_{13} \\ (\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{33}) = 2G(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{33}) \\ \dot{\sigma}_{12} = 2G\dot{\epsilon}_{12}; \dot{\sigma}_{13} = 2G\dot{\epsilon}_{13}; \dot{\sigma}_{23} = 2G\dot{\epsilon}_{23} \end{cases} \quad 4.2.32$$

On remarque l'apparition, dans la loi de comportement, de termes  $C_{ijkl}^{epa}$  avec  $k \neq l$  ce qui traduit l'anisotropie du tenseur de rigidité.

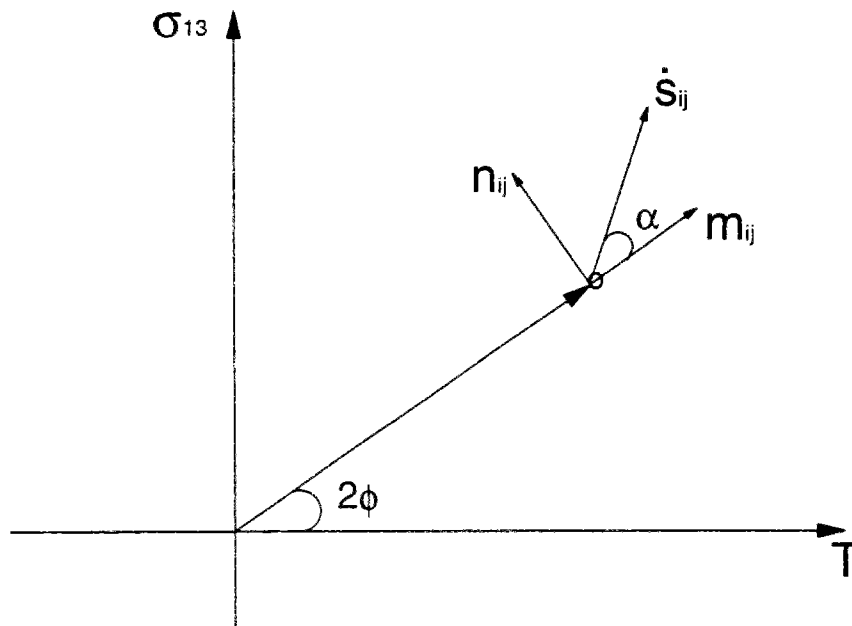


Figure 4.3: Représentation de l'orientation de l'incrément du déviateur des contraintes dans l'espace des contraintes déviatoriques (Sulem et al [1993])

#### IV.2.1.2.2 Modèle complet

Pour le modèle complet anisotrope, la loi de comportement est la suivante

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{epda} \dot{\epsilon}_{kl} \quad 4.2.33$$

$$C_{ijkl}^{epda} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^d + C_{ijkl}^a \quad 4.2.34$$

où  $C_{ijkl}^e$  et  $C_{ijkl}^d$  représentent respectivement les tenseurs d'hyperélasticité et d'endommagement, traduisant la dépendance du module de cisaillement sécant  $G_s$  par rapport aux contraintes et à l'intensité du déviateur des déformations  $g^p$  (équation 2.4.4). Les tenseurs d'hyperélasticité et d'endommagement sont donnés par les relations 2.2.26 et 2.5.3. Quant aux tenseurs de plasticité  $C_{ijkl}^p$  et d'anisotropie  $C_{ijkl}^a$ , ils sont donnés par les relations 2.3.14 et 4.2.30.

#### IV.2.1.3 Couplage Anisotropie non-Coaxialité

Les lois d'écoulement hypoplastique 4.2.16. et 4.2.26 peuvent être couplées pour donner une loi unique combinant la prise en compte de l'anisotropie induite par les contraintes et la non-coaxialité, ce qui donne pour le tenseur des vitesses de déformation plastique la relation suivante

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\langle 1 \rangle}{H} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{\chi}{2(q-p)h_t} (n_{kl} n_{kl})^{1/2} m_{ij} + \frac{1}{2G_s + c + h_1} N_{ijrt} C_{rtkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \quad 4.2.35$$

Le premier terme du tenseur des vitesses de déformation plastique représente la théorie de l'écoulement plastique classique, le second terme est un terme coaxial représentant l'anisotropie induite par les contraintes et le troisième terme représente la non-coaxialité.

L'effet de la non-coaxialité est donné par le paramètre  $\xi^*$  (équation 4.2.22), alors que celui de l'anisotropie est donné par le paramètre  $\chi$ . Dans le paragraphe 4.2.3 nous étudierons

l'influence de ces deux paramètres sur la localisation des déformations en bandes de cisaillement.

#### IV.2.1.3.1 Modèle simplifié

La loi de comportement pour le modèle simplifié non-coaxial anisotrope s'écrit donc sous la forme suivante

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^{epa} \cdot \varepsilon_{kl} \quad 4.2.36$$

$$C_{ijkl}^{epa} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p \pm C_{ijkl}^a \quad 4.2.37$$

où  $C_{ijkl}^e$  et  $C_{ijkl}^p$  représentent respectivement les tenseurs d'élasticité (équation 2.2.7) et de plasticité non-coaxiale (équation 4.2.20). Quant au tenseur d'anisotropie  $C_{ijkl}^a$ , ils est donné par la relation 4.2.30.

#### IV.2.1.3.2 Modèle complet

Pour le modèle complet non-coaxial anisotrope la loi de comportement est de la forme

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^{epda} \cdot \varepsilon_{kl} + \left( E_{ij} Q_g \frac{\langle \tau \rangle}{H} B_{kl} \right) \cdot \varepsilon_{kl} \quad 4.2.38$$

$$C_{ijkl}^{epda} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^d \pm C_{ijkl}^a \quad 4.2.39$$

où  $C_{ijkl}^e$  et  $C_{ijkl}^d$  représentent respectivement les tenseurs d'hyperélasticité et d'endommagement (équations 2.2.26 et 2.5.3). Quant aux tenseurs de plasticité non-coaxiale  $C_{ijkl}^p$  et d'anisotropie  $C_{ijkl}^a$ , ils sont donnés par les relations 4.2.20 et 4.2.30.



### IV.2.2 Mode de bifurcation localisée

Lorsque l'on envisage la localisation de la déformation en bande de cisaillement comme un phénomène de bifurcation en suivant l'approche statique de Rudnicki et Rice [1975], on s'intéresse à un milieu non visqueux infini homogène sollicité sous des vitesses de contrainte et de déformation homogènes et l'on cherche si, en tenant compte des conditions statiques (équilibre des forces de part et d'autre de la bande de cisaillement) et cinématique (discontinuité des déformations à travers la bande de cisaillement) et de la loi rhéologique du matériau, une déformation en un mode localisé particulier: la bande de cisaillement peut se superposer à la déformation homogène du matériau.

Une bande de cisaillement est une structure de déformation bien définie d'épaisseur finie non nulle dont la frontière est le lieu d'une discontinuité du taux de déformation mais pas du taux de déplacement. Elle correspond à un mode de bifurcation que l'on peut analyser par la théorie de la bifurcation en précisant le chemin de sollicitation suivi et la loi de comportement du matériau testé. Quand le critère de bifurcation localisée est rempli, la déformation se localise en une bande de cisaillement et tout se passe comme si deux blocs quasi-rigides glissaient l'un sur l'autre le long d'une surface de rupture. Au delà du seuil de localisation, les données expérimentales enregistrées ne correspondent plus au comportement intrinsèque du matériau mais à son comportement post-bifurcation.

Quand une bifurcation en bande de cisaillement se déclenche, le champ de déformation perd sa continuité, le solide supposé homogène et non visqueux obéit à trois relations: La condition cinématique, la condition statique et la loi de comportement du matériau.

Dans l'analyse que nous faisons de notre problème, nous traitons un cas de grandes déformations, nous devons pour cela utiliser les outils mécaniques et cinématiques adéquats.

On prendra pour cela en considération le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Pi_{ij} \neq \Pi_{ji}$  (Boussinesq), et on dérivera objectivement au sens de Jaumann. Cette objectivité est assurée lorsque la différentiation s'effectue dans un repère local tournant avec une vitesse égale à la rotation propre de l'élément matériel. Si on se propose de garder toutes les équations dans le repère fixe, il convient alors d'utiliser l'opérateur de Jaumann (Ogden [1984]).

Soient  $\dot{\epsilon}_{ij}$  et  $\dot{\omega}_{ij}$  les tenseurs des vitesses de déformation et de rotation respectivement

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2 \quad 4.2.40$$

$$\dot{\omega}_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2 \quad 4.2.41$$

où  $v_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur vitesse.

La relation entre le tenseur de Piola-Kirchhoff et le tenseur de Cauchy est telle que

$$\dot{\Pi}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{ik} v_{k,j} \quad 4.2.42$$

Les équations constitutives sous forme incrémentale seront écrites sous la forme de la dérivée

au sens de Jaumann du tenseur des contraintes  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  défini par

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \omega_{kj} \quad 4.2.43$$

On en déduit la relation entre la dérivée du tenseur de Piola-Kirchhoff et la dérivée au sens de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy

$$\dot{\Pi}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \omega_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \varepsilon_{kj} + \sigma_{ij} \varepsilon_{kk} \quad 4.2.44$$

Dans ce qui suit nous adopterons le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff, bien que le tenseur de Cauchy puisse être utilisé dans la formulation statique (Rice et Rudniki [1980]).

#### IV.2.2.1 Condition cinématique

Au taux du gradient de déformation du secteur non perturbé par la localisation, s'ajoute dans

la bande de cisaillement, un champ qui peut s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel  $\vec{g} \otimes \vec{n}$

où  $\vec{n}$  est la normale à la bande et  $\vec{g}$  représente le gradient de la vitesse dans la direction  $X$  sur

laquelle est aligné  $\vec{n}$  (figure 4.4). La condition cinématique s'écrit par conséquent

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{kl}^0 + \dot{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{n} \quad 4.2.45$$

$\dot{\epsilon}_{kl}^0$  étant le taux du gradient de déformation dans la bande de cisaillement. L'expression du champ additionnel indique que le taux du gradient de déformation n'est discontinu que dans la direction perpendiculaire à la bande de cisaillement. Dans le cas où  $\dot{\mathbf{g}}$  est colinéaire à  $\mathbf{n}$ , la bande s'ouvre en mode d'extension; si par contre,  $\dot{\mathbf{g}}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{n}$ , la bande joue exclusivement en mode de cisaillement. En général  $\dot{\mathbf{g}}$  est quelconque.

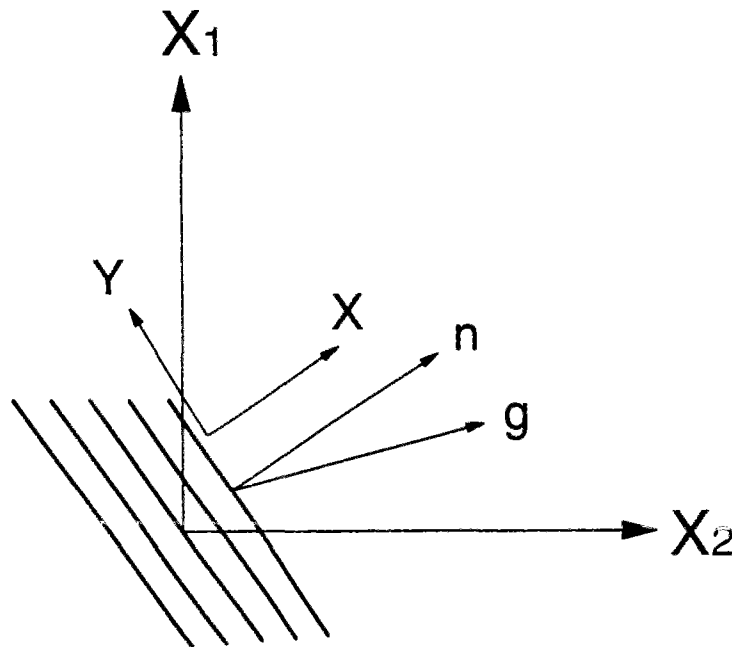


Figure 4.4: Shématisation de la cinématique d'une bande de cisaillement (Desrues [1991])

#### IV.2.2.2 Condition statique

L'apparition de la localisation en bande de cisaillement s'accompagne d'une différence entre le champ de contrainte à l'intérieur de la bande et celui à l'extérieur de la bande. A la frontière entre le matériau intact et celui atteint par la localisation de la déformation, le taux du vecteur

contrainte sur la facette parallèle à la bande doit tout de même être continu. Lorsque l'on différencie le tenseur de contrainte de Cauchy, on doit tenir compte de la rotation matérielle pour garantir "l'objectivité" de la loi de comportement (équations 4.2.40 à 4.2.44). On en déduit la condition statique qui exprime la continuité de la dérivée du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff

$$\left( \begin{matrix} 1 & 0 \\ \dot{\Pi}_{ij} & -\dot{\Pi}_{ij} \end{matrix} \right) n_j = 0 \quad 4.2.46$$

#### IV.2.2.3 Loi de comportement

Le matériau intact ou non doit suivre une loi de comportement qui peut être linéaire, multilinéaire ou non-linéaire. Sous forme incrémentale, la loi de comportement du matériau non visqueux peut s'écrire

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 4.2.47$$

où  $C_{ijkl}$  est le tenseur de raideur, et  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  étant la dérivée objective au sens de Jaumann du tenseur de contrainte de Cauchy. En combinant les relations statique 4.2.46 et cinématique 4.2.45 avec la loi de comportement et la relation entre le tenseur de Piola-Kirchhoff et le tenseur de Cauchy (équations 4.2.42 et 4.2.44); on obtient la relation suivante

$$\left[ n_i C_{ijkl} n_l + \frac{1}{2} (n_p \sigma_{pj} n_k + n_p \sigma_{pq} n_q \delta_{ik} - n_p \sigma_{pk} n_j - \sigma_{jk}) \right] g_k = 0 \quad 4.2.48$$

Le système d'équations 4.2.48 est un système homogène à trois inconnues  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  dont la solution triviale  $g_1 = g_2 = g_3 = 0$  correspond à l'absence de bifurcation. Pour ne pas avoir de solutions triviales, le déterminant du système 4.2.48 doit être nul

$$\det(n_i C_{ijkl} n_l - r_{jk}) = 0 \quad 4.2.49$$

Classiquement, le tenseur  $nCn$  où interviennent la normale  $\vec{n}$  à la bande d'orientation inconnue ainsi que le tenseur  $C$  de la loi constitutive est appelé tenseur acoustique. On remarque que le critère de localisation 4.2.49 dépend de la loi de comportement du matériau (tenseur de raideur  $C$ ), de l'orientation inconnue  $\vec{n}$  et de l'état de contrainte actuel du matériau.

#### IV.2.2.3.1 Comportement anisotrope

Pour résoudre l'équation 4.2.49 en terme d'angle  $\theta$ , inclinaison de la bande de cisaillement par rapport à la direction  $x_1$  (figure 4.5), l'expression du tenseur  $C_{ijkl}$  (equation 4.2.39) est introduite dans le critère de bifurcation 4.2.49. Si le comportement du matériau est considéré comme anisotrope, on obtient la condition de bifurcation suivante

$$a_1 \tan^4(\theta) \pm a_2 \tan^3(\theta) + a_3 \tan^2(\theta) \pm a_4 \tan(\theta) + a_5 = 0 \quad 4.2.50$$

où les coefficients  $a_i$  sont représentés par les relations suivantes

$$a_i = \begin{cases} a_1 = (G_s + t)C_{1111} \\ a_2 = C_{1113}(C_{3311} - 2t/G_s) - C_{3313}C_{1111} \\ a_3 = C_{1111}C_{3333} - C_{1133}C_{3311} - C_{1133}(G_s - t) - C_{3311}(G_s + t) \\ a_4 = C_{3313}(C_{1133} + 2t/G_s) - C_{1113}C_{3333} \\ a_5 = (G_s - t)C_{3333} \end{cases} \quad 4.2.51$$

Dans la condition de bifurcation 4.2.50, nous avons un signe (+) devant les coefficients  $a_2$  et  $a_4$  lorsque  $\theta > 0$  et un signe (-) lorsque  $\theta < 0$ .

Si en plus du comportement anisotrope du matériau, on considère un modèle non-coaxial; alors  $G_s$  sera remplacé par  $G^*$  (équation 4.2.22) dans les coefficients  $a_i$  qui dépendront des paramètres de non-coaxialité  $\xi^*$  et d'anisotropie  $\chi$ .

Si l'on prend en compte le modèle simplifié non-coaxial anisotrope le tenseur de rigidité  $C_{ijkl}$  sera représenté par la relation 4.2.37, par contre si l'on considère le modèle complet non-coaxial anisotrope alors le tenseur de rigidité est donné par l'équation 4.2.39.

#### IV.2.2.3.2 Comportement isotrope

Si le tenseur de rigidité  $C_{ijkl}$  est orthotrope ce qui se traduit par  $C_{iikl}=C_{klli}=0$  si  $k \neq l$ , les coefficients  $a_2$  et  $a_4$  sont nuls, on en déduit la relation suivante

$$a_1 \tan^4(\theta) + a_3 \tan^2(\theta) + a_5 = 0 \quad 4.2.52$$

selon les valeurs des coefficients  $a_i$ , si l'équation 4.2.52 ne présente pas de solutions réelles pour  $\tan\theta$  on a un régime elliptique et pas de bifurcation; par contre si on a deux solutions réelles distinctes (régime hyperbolique) ou une solution réelle double (régime parabolique) la localisation se déclenche et il y a formation d'une famille symétrique de bandes de cisaillement puisque l'équation caractéristique 4.2.52 est en  $\tan^2(\theta)$  (Rudnicki et Rice[1975], Rice [1976], Vardoulakis [1979]).

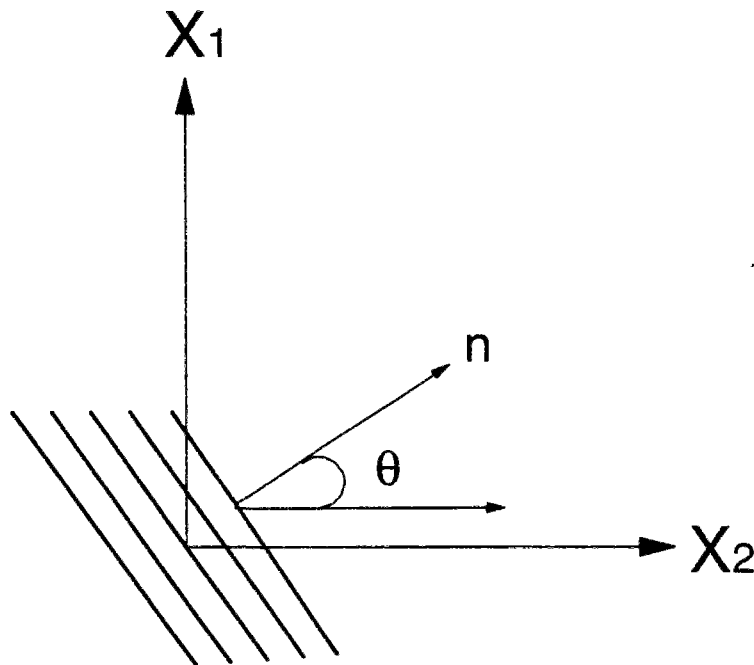


Figure 4.5: Orientation de la bande de cisaillement (Desrues [1991])

### IV.2.3 Influence des paramètres de non-coaxialité et d'anisotropie sur la localisation des déformations

La solution du problème de la localisation des déformations en bande de cisaillement consiste à déterminer l'angle d'orientation de la bande de cisaillement  $\theta_B$  et l'état d'initiation de cette bande de cisaillement caractérisé par l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g_B^p$ . L'angle d'inclinaison  $\theta_B$  peut être mesuré expérimentalement sans difficulté dans l'état de post-bifurcation car  $\theta_B$  varie très peu après l'initiation de la bande de cisaillement.

Dans ce paragraphe nous allons montrer que, par une sélection appropriée des coefficients de non-coaxialité  $\xi^*$  et d'anisotropie  $\chi$ , la prédiction de la formation des bandes de cisaillement peut être optimisée dans le sens où l'on pourra obtenir un couple  $(\theta_B, g_B^p)$  le plus proche possible des résultats expérimentaux provenant des essais axisymétriques en compression effectués par IKU.

#### IV.2.3.1 Application à l'essai de compression triaxiale

Nous allons donc juger le modèle simplifié non-coaxial anisotrope et le modèle complet non-coaxial anisotrope quant à leur capacité à prédire correctement l'initiation et l'inclinaison de la bande de cisaillement pour des essais de compression uniaxiale et triaxiale avec cycles de charge-décharge. Dans un premier temps nous nous intéresserons à l'influence du coefficient de non-coaxialité  $\xi^*$  sur le couple  $(\theta_B, g_B^p)$  pour le modèle simplifié (tableau 4.1) et le modèle complet (tableau 4.2). Le coefficient de non-coaxialité ne peut être calé lors de la phase homogène de l'essai triaxial, par contre il peut être calé sur les caractéristiques de la localisation des déformations comme l'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement  $\theta_B$ . Les valeurs du coefficient de non-coaxialité obtenues nous permettent de simuler l'initiation des bandes de cisaillement

$\sigma_c$ (MPa)	$\xi^*$	$g_B^p$	$g_B^p$ (exp)	$\theta_B$	$\theta_B$ (exp)	H
0.4	0.013	0.01515	0.01501	64.8	64-70	-0.0068
1.4	0.015	0.01571	0.01534	63.4	68	-0.0104
3.5	0.018	0.01615	0.01581	59.3	58-61	-0.0141
6.9	0.023	0.01655	0.01601	56.37	53-54	-0.0182
10.3	0.027	0.01702	0.01615	54.56	---	-0.0204

Tableau 4.1: Résultats théoriques obtenus à partir du modèle simplifié non-coaxial

Les résultats obtenus montrent que l'angle de frottement  $\phi_m^B$  correspondant à l'instant de l'initiation de la bande de cisaillement reste constant ( $\phi_m^B=38.5$ ) quelle que soit la valeur de la pression de confinement puisque le modèle simplifié ne tient pas compte de la dépendance en pression, par contre le couple  $(\theta_B, g_B^p)$  varie par rapport au coefficient de non-coaxialité. On remarque également que le modèle simplifié simule correctement l'inclinaison des bandes de cisaillement pour les essais à basse pression de confinement par contre il surestime les résultats obtenus pour les essais à pression de confinement élevée et cela quelle que soit la valeur du coefficient de non-coaxialité.

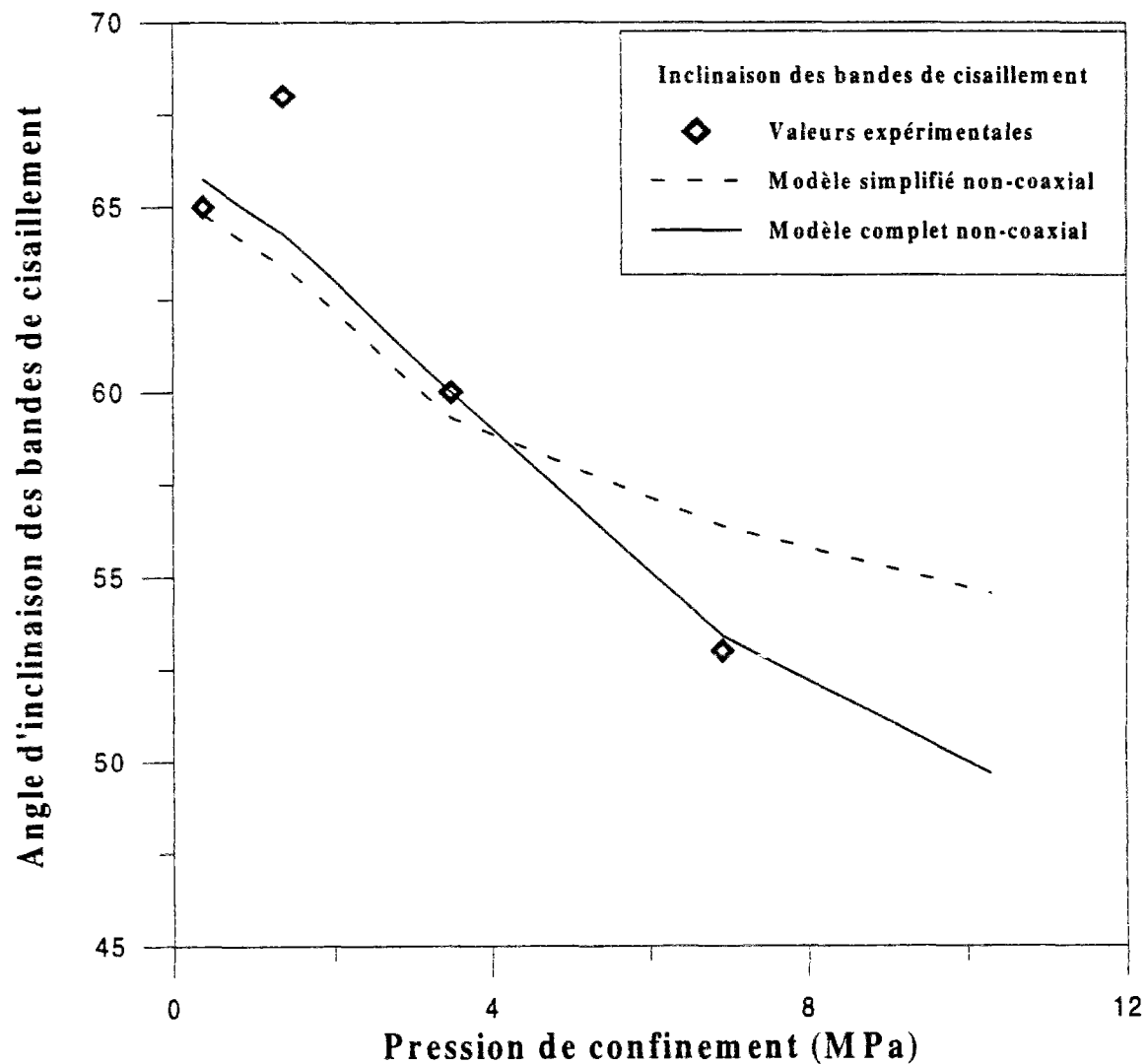
$\sigma_c$ (MPa)	$\xi^*$	$\phi_m^B$	$g_B^p$	$\theta_B$	$\theta_B$ (exp)	H
0.4	0.18	39.2	0.01511	65.82	64-70	-0.0083
1.4	0.25	38.8	0.01564	64.26	68	-0.0113
3.5	0.67	38.3	0.01608	61	58-61	-0.0121
6.9	0.83	36.2	0.01615	53.8	53-54	-0.0182
10.3	0.92	35.1	0.01626	48.3	---	-0.0231

Tableau 4.2: Résultats théoriques obtenus à partir du modèle complet non-coaxial

Grâce au modèle complet qui permet de prendre en compte la dépendance en pression, on remarque que les valeurs théoriques obtenues pour  $\theta_B$  correspondent sensiblement aux valeurs expérimentales pour toutes les pressions de confinement; un choix adéquat du coefficient de non-coaxialité pour chaque pression de confinement a permis d'obtenir un résultat satisfaisant.



Sur la figure 4.6 nous avons représenté l'évolution du couple  $(\theta_B, g_B^p)$  par rapport à la pression de confinement pour le modèle simplifié non-coaxial et le modèle complet non-coaxial en comparaison avec les résultats expérimentaux. On remarque que le modèle complet donne une simulation satisfaisante des résultats expérimentaux de l'initiation des bandes de cisaillement obtenus par la méthode présentée dans le paragraphe III.3.5. Par contre le modèle simplifié surestime l'initiation des bandes de cisaillement pour les essais à pression de confinement élevée.



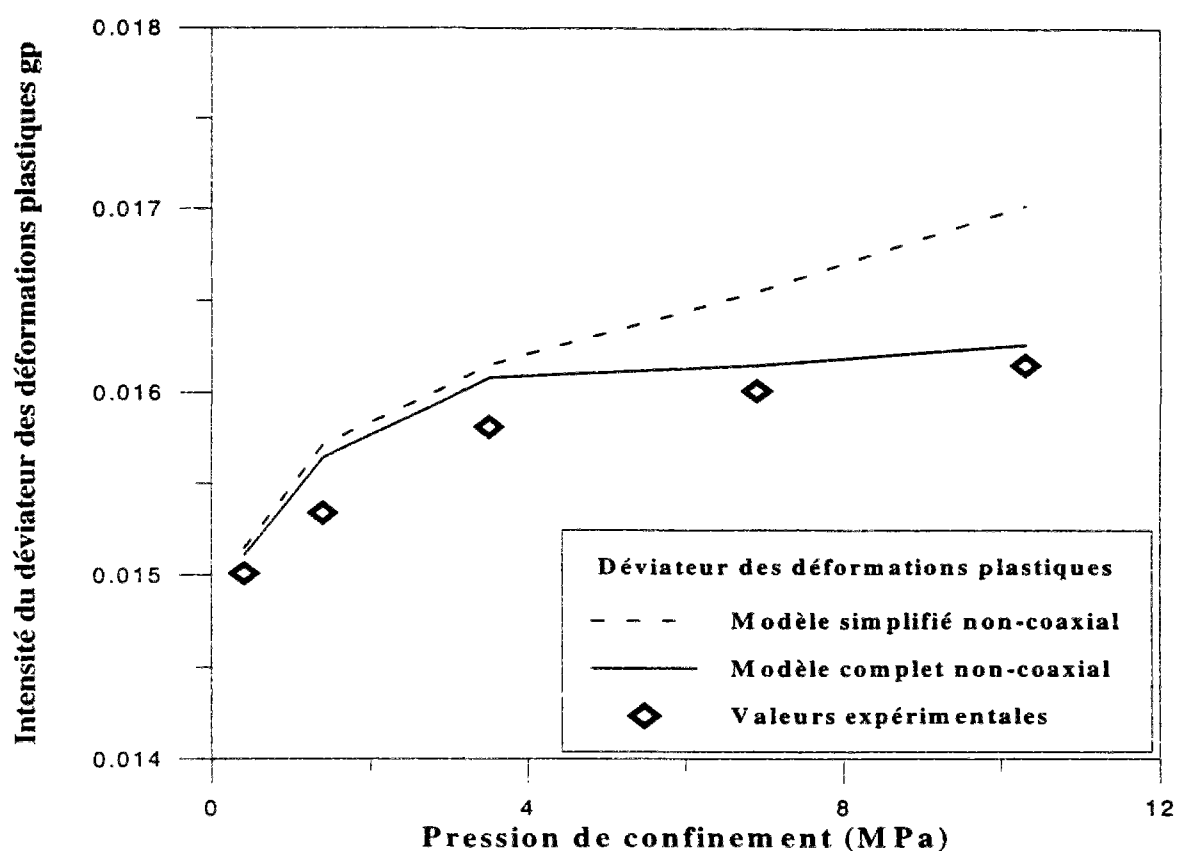


Figure 4.6: Représentation de l'évolution de  $(\theta_B, g_B^p)$  en fonction de la pression de confinement

Nous nous sommes également intéressés à l'influence des coefficients de non-coaxialité  $\xi^*$  et d'anisotropie  $\chi$  sur le couple  $(\theta_B, g_B^p)$  pour le modèle simplifié (tableau 4.3) et le modèle complet (tableau 4.4)

$\sigma_c$ (MPa)	$\chi$	$\xi^*$	$g_B^p$	$g_B^p$ (exp)	$\theta_B$	$\theta_B$ (exp)	H
0.4	1.33	0.017	0.0143	0.01501	66.9	64-70	-0.0034
1.4	1.45	0.022	0.0146	0.01534	67.2	68	-0.0082
3.5	1.79	0.028	0.0152	0.01581	67.9	58-61	-0.0121
6.9	1.98	0.032	0.0165	0.01601	73.5	53-54	-0.0162
10.3	2.2	0.046	0.01701	0.01615	78.1	---	-0.0231

Tableau 4.3: Résultats théoriques obtenus à partir du modèle simplifié non-coaxial anisotrope

On remarque que la tentative de calage des coefficients d'anisotropie  $\chi$  et de non-coaxialité  $\xi^*$  sur les valeurs expérimentales de l'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement ne donne pas de résultats satisfaisants puisque quelque soient les valeurs de ces coefficients le modèle complet ou simplifié surestiment l'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement à pressions de confinement élevées. A partir des valeurs des coefficients d'anisotropie  $\chi$  et de non-coaxialité  $\xi^*$  nous avons simulé l'initiation des bandes de cisaillement et on a remarqué une initiation de la bande de cisaillement plus précoce ( $g_B^p$  plus petit) (figure 4.7).

$\sigma_c$ (MPa)	$\chi$	$\xi^*$	$\phi_m^B$	$g_B^p$	$\theta_B$	$\theta_B$ (exp)	H
0.4	1.12	0.12	38.1	0.0141	67.3	64-70	-0.0071
1.4	1.15	0.15	37.7	0.0145	67.8	68	-0.0172
3.5	1.21	0.33	37.2	0.0153	68.3	58-61	-0.021
6.9	1.28	0.58	36.3	0.0158	70.1	53-54	-0.023
10.3	1.33	0.65	35.4	0.0159	70.7	---	-0.028

Tableau 4.4: Résultats théoriques obtenus à partir du modèle complet non-coaxial anisotrope

Comme pour le modèle simplifié, l'influence du coefficient d'anisotropie sur le modèle complet permet d'obtenir une localisation des déformations plus précoce par contre la valeur de  $\theta_B$  est surestimée pour les pressions de confinement élevées.

Sur la figure 4.7 nous avons représenté l'évolution du couple  $(\theta_B, g_B^p)$  par rapport à la pression de confinement pour le modèle simplifié non-coaxial anisotrope et le modèle complet non-coaxial anisotrope en comparaison avec les résultats expérimentaux

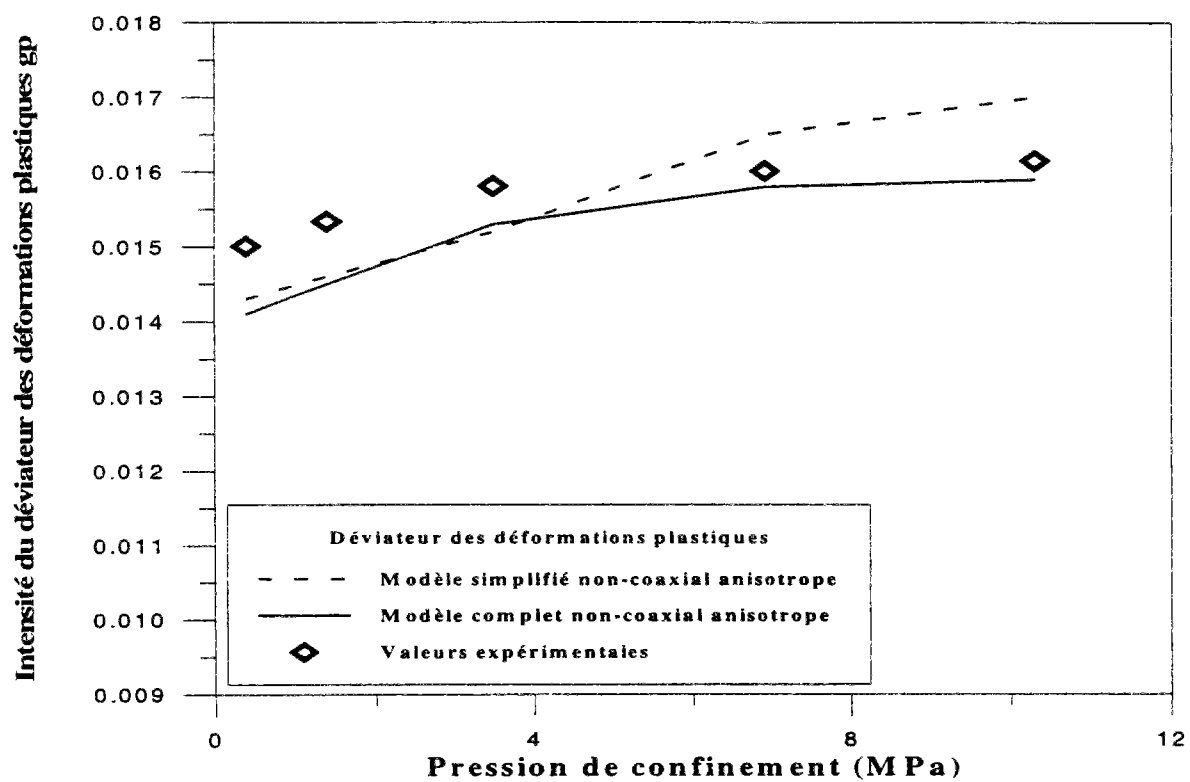
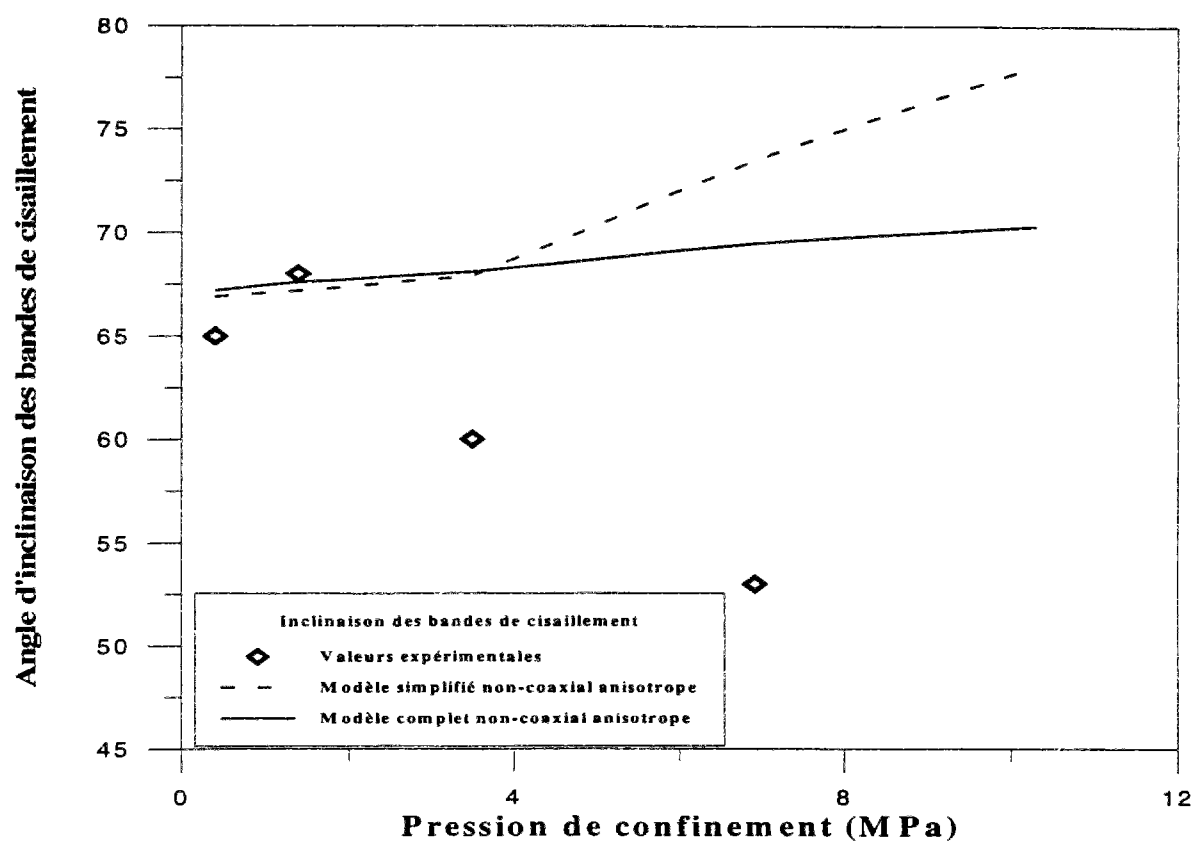


Figure 4.7: Représentation de l'évolution de  $(\theta_B, g_B^p)$  en fonction de la pression de confinement

#### IV.2.3.2 Interprétation des résultats

D'après les résultats obtenus on s'aperçoit que l'introduction de la notion de non-coaxialité a permis d'obtenir une bonne approximation de l'angle d'inclinaison et l'initiation des bandes de cisaillement (figure 4.6), d'après les résultats obtenus on a remarqué que le coefficient de non-coaxialité augmente avec la pression de confinement, on en déduit donc que pour les essais confinés le coefficient de non-coaxialité doit être élevé et on obtient la formation de bandes de cisaillement, par contre pour obtenir une bifurcation diffuse le coefficient de non-coaxialité doit être bas pour les essais triaxiaux non-confinés. Quant au couplage non-coaxialité anisotropie il a permis d'obtenir une initiation plus précoce de la localisation des déformations mais une prédiction de l'inclinaison des bandes de cisaillement moins précise (figure 4.7). On peut donc en déduire que le modèle complet non-coaxial est le mieux adapté à l'étude de la localisation des déformations en bandes de cisaillement pour le grès rouge de Wildmoor.

### IV.3 Analyse de la bifurcation diffuse

En marge du mode de localisation des déformations en bande de cisaillement, il peut apparaître un mode de bifurcation diffus sous certaines conditions de pression de confinement et d'éclatement de l'échantillon. Ce mode de bifurcation diffuse peut conduire soit à une mise en tonneau pour des essais confinés, soit à une rupture en colonnettes (clivage axial) pour les essais uniaxiaux. Comme l'a remarqué Bazant [1967], le mode de bifurcation diffuse induit dans l'échantillon des contraintes de traction pouvant conduire à l'ouverture et à la propagation de microfissures préexistantes dans la direction de la contrainte principale majeure. En effet le mode de bifurcation diffuse est caractérisé par sa longueur d'onde; lorsque cette longueur d'onde est de l'ordre de la taille de l'échantillon, on a une mise en tonneau (figure 1.6.b) de cet échantillon, par contre lorsque la longueur d'onde faible, le mode de bifurcation interagit à l'échelle des microfissures et conduit à un clivage axial (figure 1.6.c). Dans ce paragraphe nous allons étudier l'effet de la loi de comportement (modèles simplifié ou complet non-

coaxiaux), de la pression de confinement et de l'éclatement de l'échantillon sur le mode de bifurcation diffuse pour des essais de compression triaxiale et uniaxiale.

### IV.3.1 Mise en équations

Pour étudier la possibilité de l'existence d'un mode de déformation non-homogène, vérifiant les mêmes conditions aux limites que la solution homogène fondamentale, on considère le champ de déplacements suivant (Vardoulakis [1983a] et Sulem et Vardoulakis [1990], [1995])

$$v_r = U(\rho) \cos(\zeta) \quad ; \quad v_z = W(\rho) \sin(\zeta) \quad 4.3.1$$

où  $\rho$  et  $\zeta$  sont les coordonnées radiales et axiales réduites

$$\rho = \frac{r}{R} \quad ; \quad \zeta = \frac{m\pi z}{H} \quad 4.3.2$$

$R$  et  $H$  représentent le rayon et la hauteur de l'échantillon cylindrique étudié,  $m$  est le nombre d'onde du mode de bifurcation considéré ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Les conditions d'équilibre, exprimées en terme de dérivée objective au sens de Jaumann du tenseur des contraintes de Cauchy, s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + 2t \frac{\partial \omega}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{zz} + 2t\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\dot{\omega}}{r}\right) &= 0 \end{aligned} \quad 4.3.3$$

avec

$$t = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \quad 4.3.4$$

Grâce à la loi de comportement ( $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$ ) pour le modèle simplifié (équation 2.2.27) ou complet (équation 2.2.68) et au champ de déformations 4.3.1, les équations d'équilibre 4.3.3 deviennent

$$\begin{aligned} a_1 L_\rho(U) - a_2 K_m^2 U + a_3 K_m W' &= 0 \\ a_4 K_m \left( U + \frac{U}{\rho} \right) - a_5 \left( W'' + \frac{W'}{\rho} \right) + a_6 K_m^2 W &= 0 \end{aligned} \quad 4.3.5$$

où  $L_\rho$  est l'opérateur de Bessel

$$L_\rho(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \quad 4.3.6$$

et

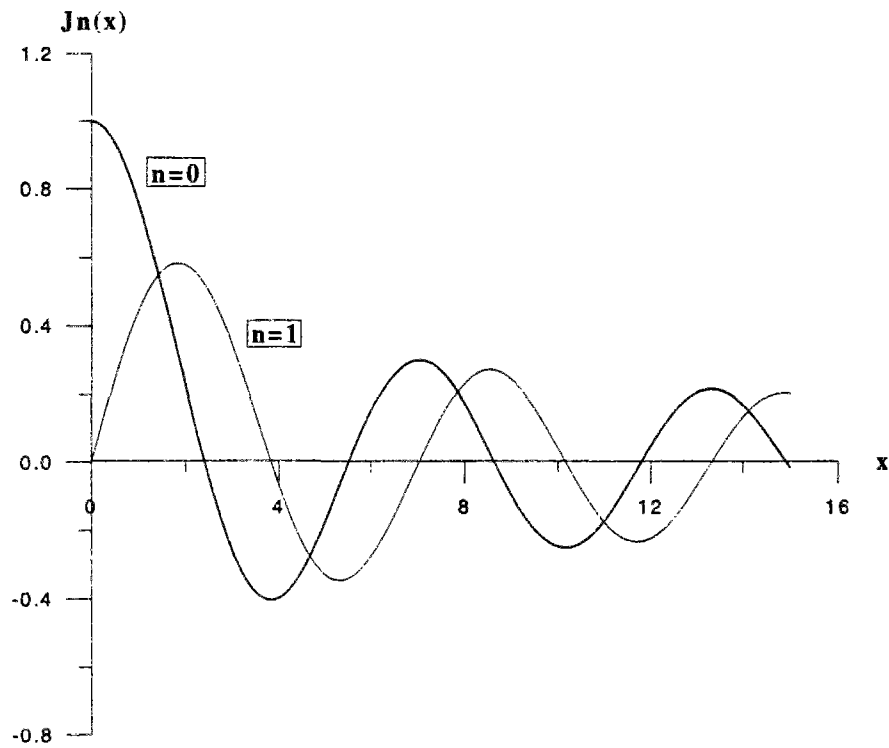
$$\begin{aligned} a_1 &= C_{1111}; \quad a_2 = G_s - t; \quad a_3 = C_{1133} + G_s + t \\ a_4 &= C_{3311} + G_s - t; \quad a_5 = G_s + t; \quad a_6 = C_{3333} \end{aligned} \quad 4.3.7$$

La solution du système d'équations différentielles 4.3.5 est de la forme suivante

$$U = A J_1(K_m \beta \rho); \quad W = B J_0(K_m \beta \rho) \quad 4.3.8$$

où  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro et un (Abramowitz et Stegun [1965], figure 4.8), A et B des constantes d'intégration et  $K_m$  est donné par la relation

$$K_m = \frac{m\pi R}{H} \quad 4.3.9$$

Figure 4.8: Représentation des fonctions de Bessel d'ordre  $n=0$  et  $n=1$ 

A partir des équations 4.3.5 et 4.3.8 on obtient le système d'équations homogène suivant

$$\begin{pmatrix} a_1\beta^2+a_2 & a_3\beta \\ a_4\beta & a_5\beta^2+a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 4.3.10$$

Pour ne pas avoir de solution triviale  $A=B=0$  le déterminant du système 4.3.10 doit être nul, on en déduit l'équation caractéristique pour  $\beta$  de la forme

$$a\beta^4+b\beta^2+c=0 \quad 4.3.11$$

avec

$$\begin{aligned} a &= a_1a_5 \\ b &= a_1a_6+a_2a_5-a_3a_4 \end{aligned} \quad 4.3.12$$



$$c=a_2a_6$$

Soient  $\beta_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) les racines de l'équation caractéristique 4.3.11, on distingue les cas suivants

#### IV.3.1.1 Régime elliptique complexe

Si toutes les racines de l'équation caractéristique 4.3.11 sont complexes alors on est dans le régime elliptique complexe

$$\begin{aligned}\beta_{1/3} &= \pm(p+iq); \quad \beta_{2/4} = \pm(p-iq) \\ p &= ((P^2 + Q^2)^{1/2} + P)/2; \quad q = ((P^2 + Q^2)^{1/2} - P)/2 \\ P &= -b/(2a); \quad Q = (b^2 - 4ac)^{1/2}/(2a)\end{aligned}\tag{4.3.13}$$

on en déduit les fonctions de base suivantes

$$U_1 = J_1(K_m \beta_1 \rho); \quad U_2 = J_1(K_m \beta_2 \rho) \tag{4.3.14}$$

$$W_1 = w_1 J_0(K_m \beta_1 \rho); \quad W_2 = w_2 J_0(K_m \beta_2 \rho) \tag{4.3.15}$$

où les facteurs de proportionnalité  $w_{1/2}$  sont tels que

$$w_{1/2} = \frac{-1}{a_3 \beta_{1/2}} (a_2 + a_1 \beta_{1/2}^2) \tag{4.3.16}$$

#### IV.3.1.2 Régime elliptique imaginaire

Si toutes les racines de l'équation caractéristique 4.3.11 sont imaginaires pures alors on est dans le régime elliptique imaginaire et les fonctions de base s'écrivent

$$U_1 = I_1(K_m \beta_1 \rho); \quad U_2 = I_1(K_m \beta_2 \rho) \tag{4.3.17}$$

$$W_1 = w_1 I_0(K_m \beta_1 \rho); \quad W_2 = w_2 I_0(K_m \beta_2 \rho) \tag{4.3.18}$$

où les facteurs de proportionnalité  $w_{1/2}$  sont tels que

$$w_{1/2} = \frac{1}{a_3 \beta_{1/2}} (a_2 - a_1 \beta_{1/2}^2) \quad 4.3.19$$

et

$$l_0(z) = J_0(iz); l_1(z) = -iJ_1(iz) \quad 4.3.20$$

#### IV.3.1.3 Régime hyperbolique

On est en régime hyperbolique dans le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique 4.3.11 sont réelles; les fonctions de base  $U_i$ ,  $W_i$  et les coefficients de proportionnalité  $w_i$  sont respectivement donnés par les relations 4.3.14, 4.3.15 et 4.3.16.

#### IV.3.1.4 Condition de bifurcation

Dans le cas que nous considérons, les conditions aux limites sont telles qu'une pression de confinement constante  $\sigma_3$  agit sur la surface de l'échantillon cylindrique. Mathématiquement cette condition est traduite par la relation suivante

$$\sigma_3 (n_k \delta_{il} - n_l \delta_{ki}) v_{k|l} = 0 \quad 4.3.21$$

où  $n_i$  est le vecteur unitaire normal à la surface du cylindre. En terme d'amplitude  $U$  et  $W$  la condition 4.3.21 peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_1(U, W) &= \left\{ C_{1111} W' + C_{1122} \frac{U}{\rho} + C_{1133} K_m W \right\}_{\rho=1} = 0 \\ \phi_2(U, W) &= \{ W' - K_m U \}_{\rho=1} = 0 \end{aligned} \quad 4.3.22$$

On en déduit la solution générale du système différentiel 4.3.5

$$U = \sum_{i=1}^2 \lambda_i U_i; \quad W = \sum_{i=1}^2 \lambda_i W_i \quad 4.3.23$$

La condition de bifurcation résulte du fait que l'on ne doit pas avoir de solution triviale en  $\lambda_i$ , ce qui nous donne la relation suivante

$$\det(\phi_{ij}) = \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{21}\phi_{12} = 0 \quad 4.3.24$$

où

$$\phi_{ij} = \begin{pmatrix} \phi_1(U_1, W_1) & \phi_1(U_2, W_2) \\ \phi_2(U_1, W_1) & \phi_2(U_2, W_2) \end{pmatrix}_{p=1} \quad 4.3.25$$

Pour le régime elliptique complexe la condition de bifurcation s'écrit

$$\begin{aligned} \phi_1(U_1, W_1) &= -C_{1111}w_1J_1(K_m\beta_1) + C_{1122}J_1(K_m\beta_1) + C_{1133}K_mw_1J_0(K_m\beta_1) \\ \phi_1(U_2, W_2) &= -C_{1111}w_2J_1(K_m\beta_2) + C_{1122}J_1(K_m\beta_2) + C_{1133}K_mw_2J_0(K_m\beta_2) \\ \phi_2(U_1, W_1) &= -K_mJ_1(K_m\beta_1) - w_1J_0(K_m\beta_1) \\ \phi_2(U_2, W_2) &= -K_mJ_1(K_m\beta_2) - w_2J_1(K_m\beta_2) \\ \phi_1(U_1, W_1)\phi_2(U_2, W_2) - \phi_2(U_1, W_1)\phi_1(U_2, W_2) &= 0 \end{aligned} \quad 4.3.27$$

Pour le régime elliptique imaginaire la condition de bifurcation est telle que

$$\begin{aligned} \phi_1(U_1, W_1) &= C_{1111}w_1I_1(K_m\beta_1) + C_{1122}I_1(K_m\beta_1) + C_{1133}K_mw_1I_0(K_m\beta_1) \\ \phi_1(U_2, W_2) &= C_{1111}w_2I_1(K_m\beta_2) + C_{1122}I_1(K_m\beta_2) + C_{1133}K_mw_2I_0(K_m\beta_2) \\ \phi_2(U_1, W_1) &= -K_mI_1(K_m\beta_1) + w_1I_1(K_m\beta_1) \\ \phi_2(U_2, W_2) &= -K_mI_1(K_m\beta_2) - w_2I_1(K_m\beta_2) \\ \phi_1(U_1, W_1)\phi_2(U_2, W_2) - \phi_2(U_1, W_1)\phi_1(U_2, W_2) &= 0 \end{aligned} \quad 4.3.28$$

Pour le régime parabolique nous obtenons

$$\begin{aligned}
\phi_1(U_1, W_1) &= -C_{1111}w_1J_1(K_m\beta_1) + C_{1122}J_1(K_m\beta_1) + C_{1133}K_mw_1J_0(K_m\beta_1) \\
\phi_1(U_2, W_2) &= -C_{1111}w_2J_1(K_m\beta_2) + C_{1122}J_1(K_m\beta_2) + C_{1133}K_mw_2J_0(K_m\beta_2) \\
\phi_2(U_1, W_1) &= -K_mJ_1(K_m\beta_1) - w_1J_0(K_m\beta_1) \\
\phi_2(U_2, W_2) &= -K_mJ_1(K_m\beta_2) - w_2J_1(K_m\beta_2) \\
\phi_1(U_1, W_1)\phi_2(U_2, W_2) - \phi_2(U_1, W_1)\phi_1(U_2, W_2) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.3.29}$$

Les solutions de l'équation caractéristique 4.3.11, vérifiant les conditions de bifurcation 4.3.27 à 4.3.29, se trouvent dans les régimes elliptique complexe et hyperbolique. Sur la figure 4.9 nous avons représenté ces différents régimes, et on remarque que la formation des bandes de cisaillement correspond à une perte d'ellipticité des équations du problème, par contre la bifurcation diffuse est un problème aux limites dépendant de la pression de confinement et de l'élanement de l'échantillon.

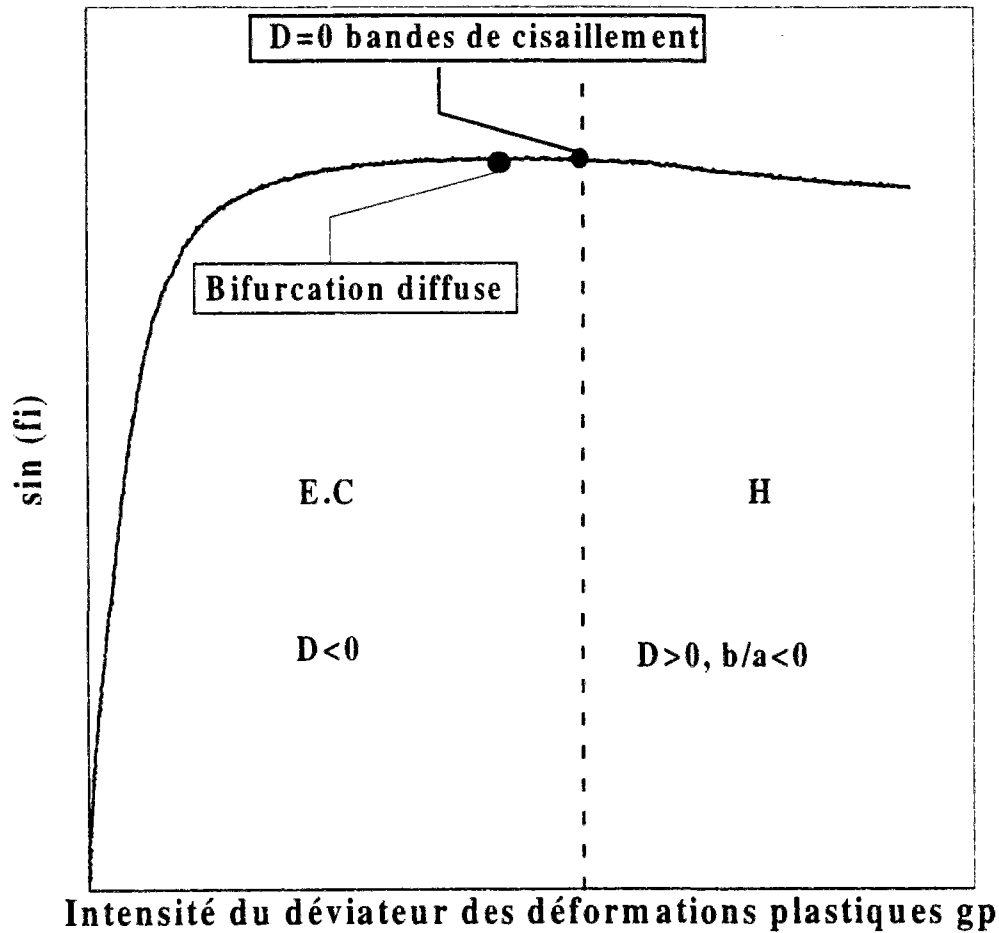


Figure 4.9: Schématisation de la formation des bandes de cisaillement et de la bifurcation diffuse

### IV.3.2 Application à la compression uniaxiale et triaxiale

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser aux conditions pour lesquelles on obtient une bifurcation diffuse pour des essais de compression uniaxiale et triaxiale. Nous présenterons quelques exemples de l'influence du nombre modal  $m$  sur l'initiation de la bifurcation diffuse, ainsi que celle de l'élancement de l'échantillon sur sa résistance et sa stabilité.

#### IV.3.2.1 Modèle simplifié non-coaxial

Sur la figure 4.10 nous avons représenté l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  à la bifurcation en fonction du nombre modal  $m$ , puis en fonction de l'élancement de l'échantillon  $H/R$  pour une pression de confinement donnée car le modèle simplifié ne tient pas compte de la dépendance en pression. En ce qui concerne le module de non-coaxialité nous avons choisi un  $\xi^*$  constant ( $\xi^*=0.5$ ).

D'après les résultats obtenus nous avons remarqué que lorsque le nombre modal  $m$  augmente la bifurcation diffuse et la formation de bandes de cisaillement se produisent simultanément. Cela peut expliquer le fait que pour les essais triaxiaux confinés le mode de bifurcation dominant soit la localisation en bandes de cisaillement, alors que pour les essais non confinés le mode dominant est la bifurcation diffuse. En ce qui concerne l'élancement de l'échantillon, on remarque que la résistance chute pour un élancement croissant jusqu'à un rapport  $H/R$  de l'ordre de 5 alors que pour des rapports plus élevés la réduction de résistance est très faible. La stabilité d'un échantillon, de grès rouge de Wildmoor soumis à un essai de compression uniaxiale ou triaxiale, dépend donc de son élancement.

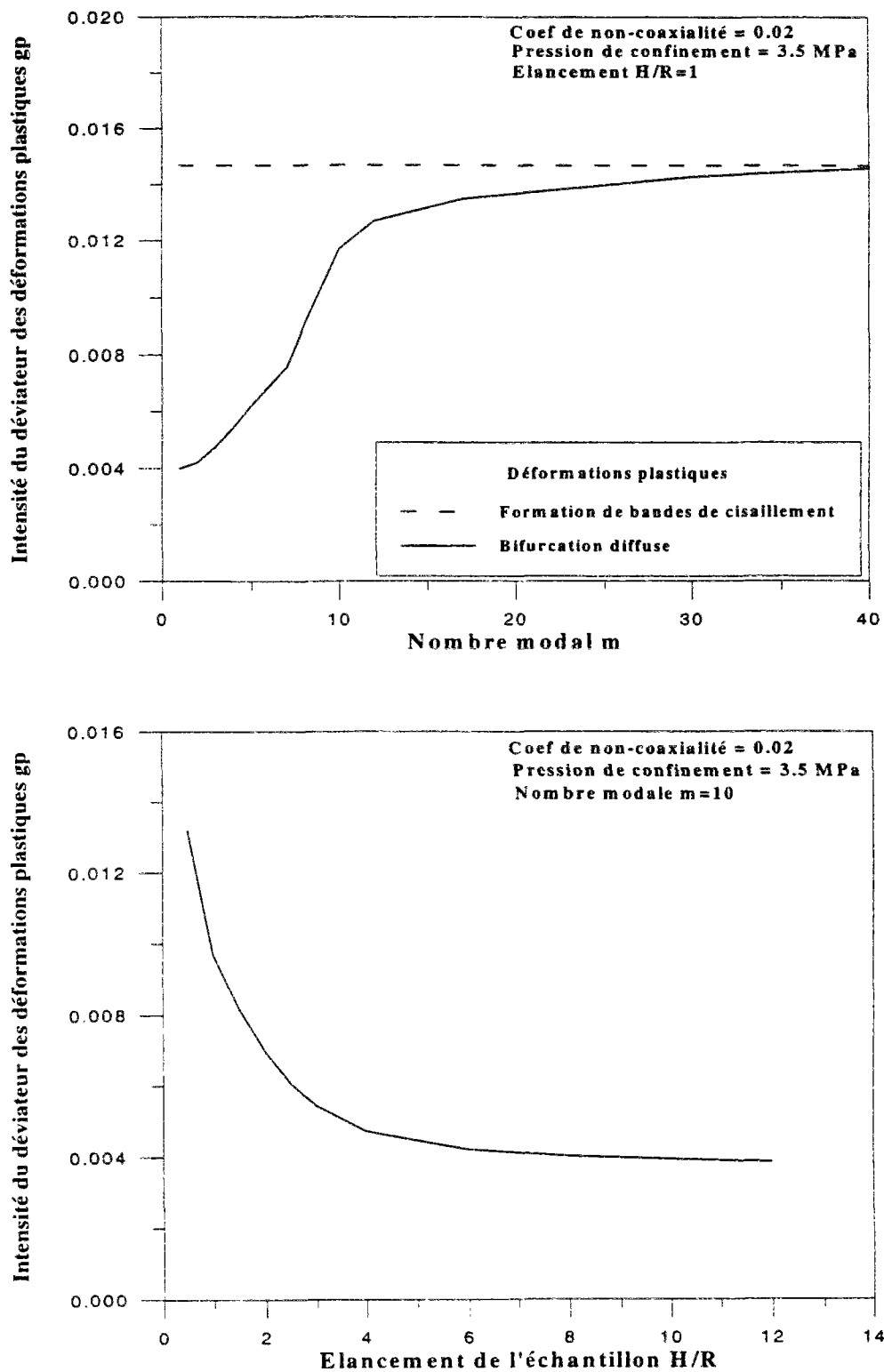
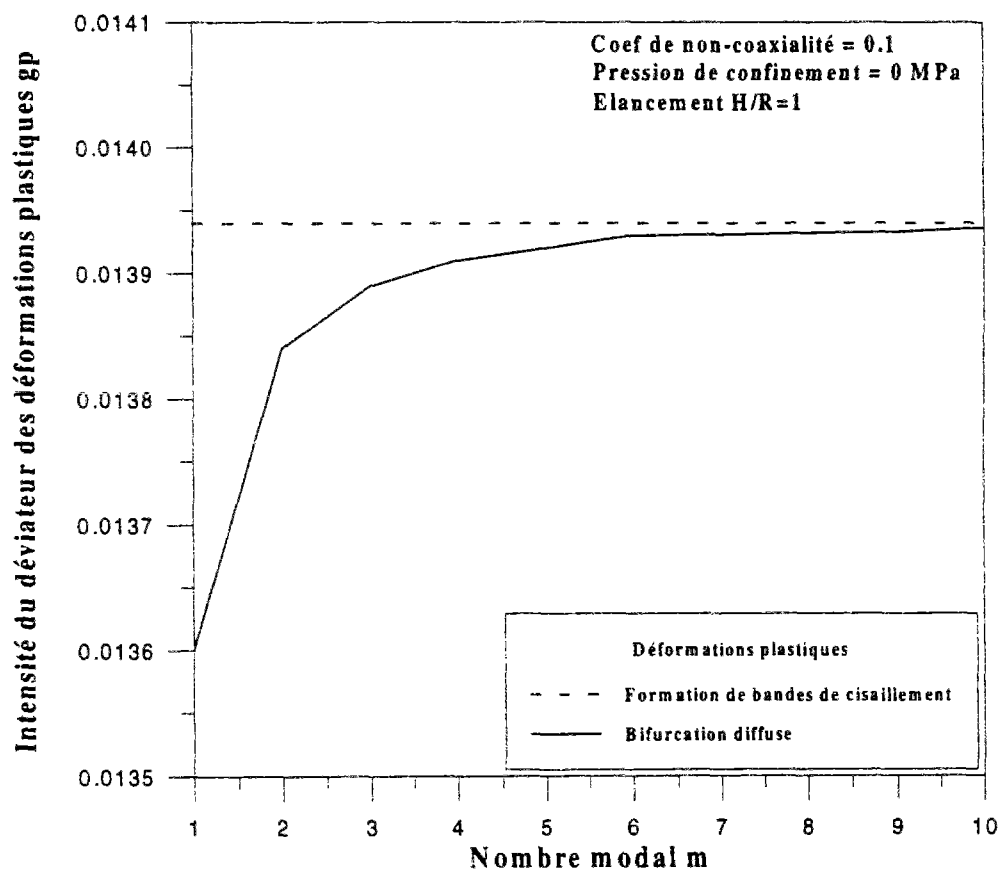
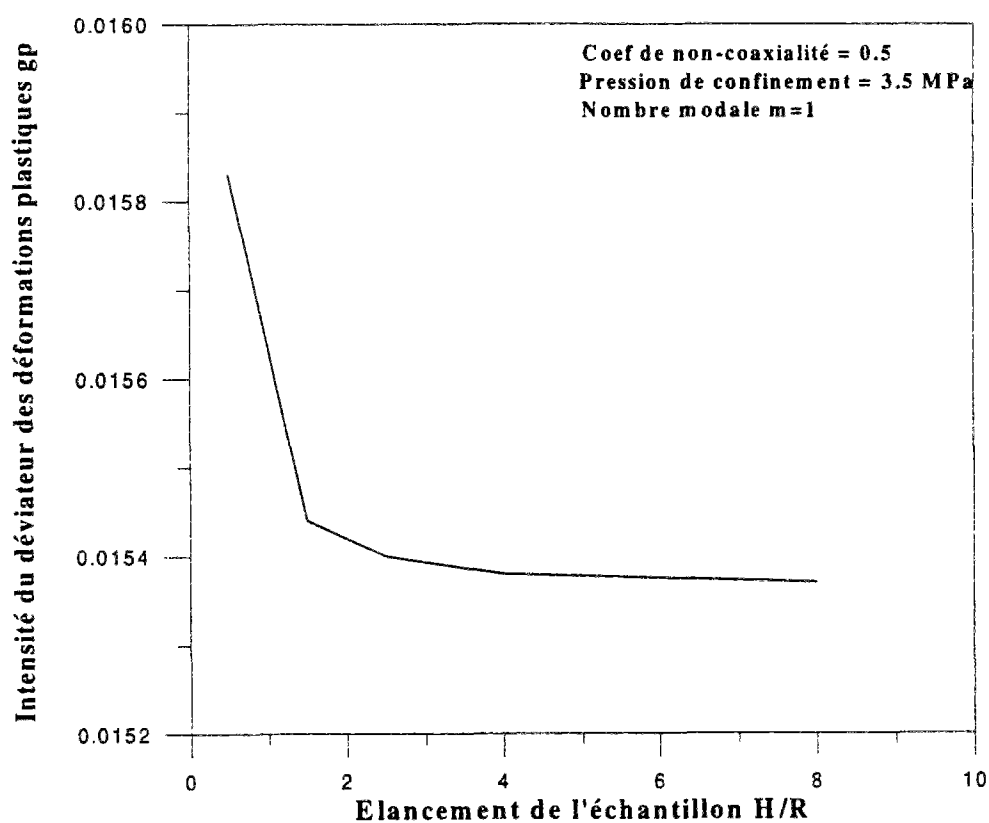
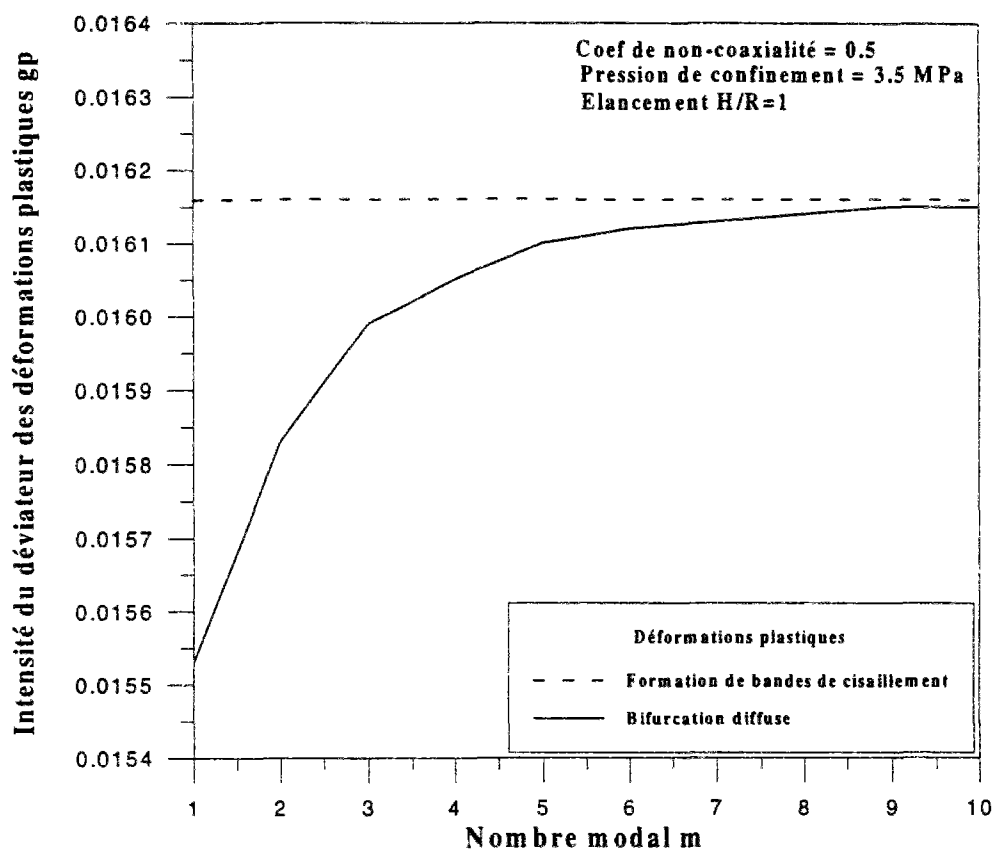


Figure 4.10: Représentation de l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  à la bifurcation en fonction du nombre modal  $m$  et de l'élancement de l'échantillon  $H/R$  (modèle simplifié)

### IV.3.2.2 Modèle complet non-coaxial

Pour le modèle hyperélastique non-coaxial, on a une dépendance en pression qui se répercute sur l'initiation de la bifurcation diffuse. Sur la figure 4.11 nous représentons l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  à la bifurcation en fonction du nombre modal  $m$ , puis en fonction de l'élancement de l'échantillon  $H/R$  pour des modules de non-coaxialité  $\xi^*=0.1$  et  $0.5$  correspondant respectivement aux pressions de confinements  $p_c=0$  et  $3.5$  Mpa. Comme pour le modèle simplifié on remarque que la résistance de l'échantillon de grès chute pour un élancement croissant jusqu'à un rapport  $H/R$  de l'ordre de 5 et que lorsque le nombre modal  $m$  augmente la bifurcation diffuse et la formation de bandes de cisaillement se produisent simultanément.







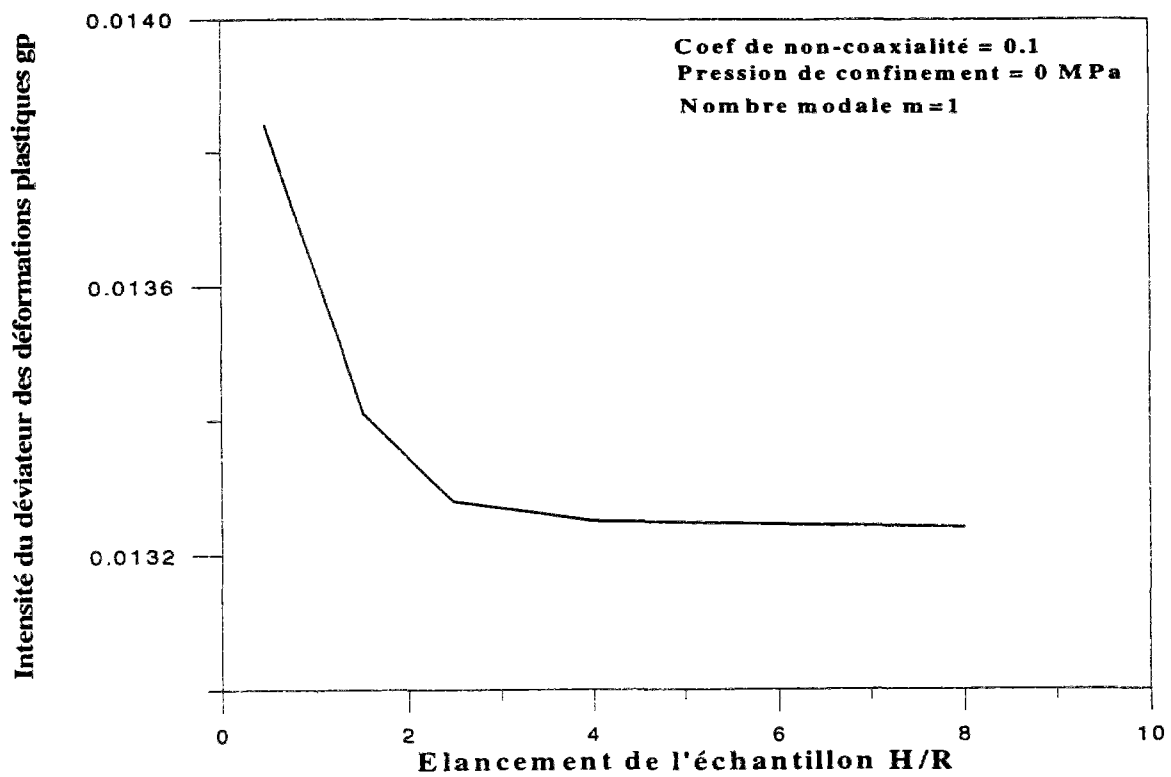


Figure 4.11: Représentation de l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$  à la bifurcation en fonction du nombre modal  $m$  et de l'élancement de l'échantillon  $H/R$  pour les pressions de confinement 0 et 3.5 MPa (modèle complet)

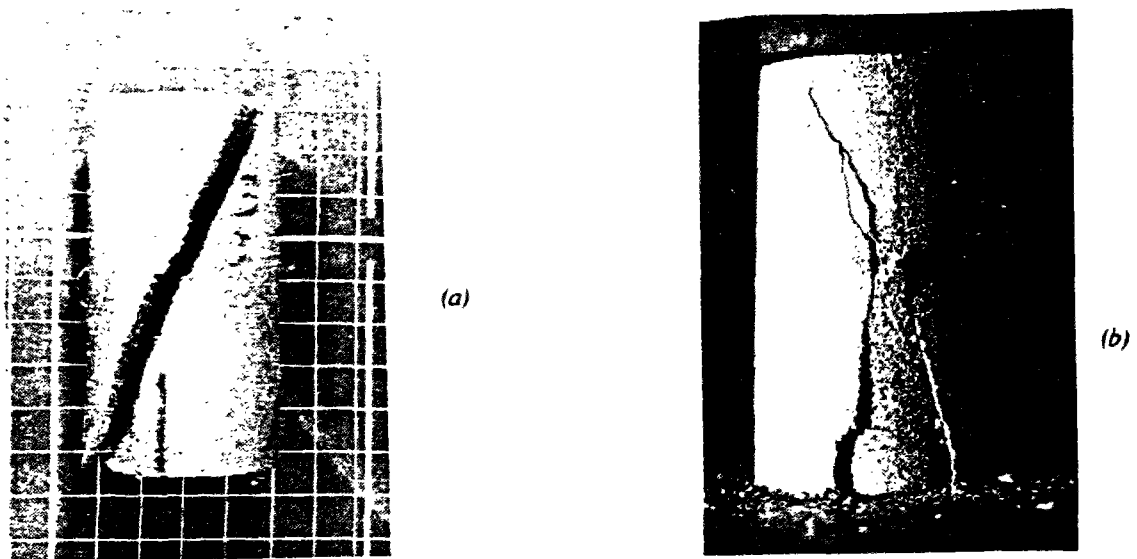


Figure 4.12: Représentation d'échantillons de grès de wildmoor à la rupture (a) essai en compression confiné (formation d'une bande de cisaillement), (b) essai en compression non-confiné (bifurcation diffuse) (Papamichos et al [1996b])

## IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que la prédiction du point de localisation des déformations en bandes de cisaillement dépend largement de la loi de comportement considérée, le modèle complet non-coaxial étant le mieux adapté car tenant compte de la dépendance en pression des modules élastiques.

A coté du mode de bifurcation localisé, nous avons étudié la possibilité d'apparition d'un mode de bifurcation diffus conduisant à la mise en tonneau de l'échantillon. Ce mode de bifurcation génère des tractions dans l'échantillon qui peuvent conduire à l'activation et à la propagation instable des microfissures préexistantes dans la roche. De l'étude de la bifurcation diffuse nous retenons que la stabilité de l'échantillon dépend largement de son élancement.

Pour finir nous avons remarqué que pour les essais confinés le mode de bifurcation dominant est la localisation en bandes de cisaillement alors que pour les essais non confinés le mode dominant est la bifurcation diffuse (figure 4.12).



# **Chapitre V**

## **Etude de la stabilité d'un forage pétrolier en cours de creusement et de production**

### **V.1 Introduction**

Nous avons présenté dans le chapitre IV une approche complète de la rupture d'un échantillon, de grès rouge de Wildmoor, dans des essais de compression triaxiale comme phénomène de bifurcation. Cette approche a mis en évidence la possibilité d'existence de différents modes de rupture (localisation des déformations en bandes de cisaillement, mise en tonneau de l'échantillon) et l'influence des conditions géométriques (élancement de l'échantillon) ou de la pression de confinement sur l'apparition d'un mode de rupture préférentiel. Nous allons appliquer les résultats de cette étude à d'autres conditions de contraintes et de déformations, en l'occurrence à l'analyse de la stabilité d'un forage pétrolier (problème en déformation plane) en cours de creusement et de production.

En général le creusement d'un forage pétrolier peut s'accompagner de phénomènes de rupture en paroi dû à la concentration de contraintes induites par le creusement, mais ces phénomènes de rupture peuvent également apparaître en phase de production puisque lors de cette phase on applique à la paroi du forage une pression de fluide inférieure à celle du réservoir, cette différence que l'on appelle gradient de pression appliqué va contrôler la quantité de pétrole produite. Cette application d'un gradient de pression implique une augmentation des

contraintes effectives à la paroi pouvant conduire à des phénomènes de rupture s'accompagnant d'une production de sable qui est le résultat de transport de particules libres à travers la matrice rocheuse, ces particules ayant été détachées suite à la perte de cohésion du matériau résultat de la rupture en paroi.

Dans ce chapitre nous allons présenter un modèle constitutif en déformation plane élastoplastique (modèle simplifié), puis un modèle en déformation plane hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire (modèle complet) pour le grès de Wildmoor. Pour tenir compte du couplage roche-fluide nous présentons dans le second paragraphe une théorie des milieux continus granulaires biphasiques. Par la suite nous avons analysé l'influence des modèles de comportements sur le champ de contraintes au voisinage du puits, mais également sur la stabilité du forage puisque nous nous sommes intéressés aux conditions de rupture du forage responsables de la production de sable, l'outil utilisé étant la théorie des bifurcations (bifurcation en instabilité de surface ou de volume).

## V.2 Modèle en déformation plane pour le grès de Wildmoor

### V.2.1 Comportement élastoplastique (modèle simplifié)

Le critère de plasticité et le potentiel plastique s'écrivent sous la forme

$$F = T - (q - p)\mu(g^p) \quad ; \quad Q = T - (q - p)\beta(g^p) \quad 5.2.1$$

où  $\mu$  et  $\beta$  représentent les coefficients de frottement et de dilatance correspondants, et dont les expressions pour le modèle simplifié sont données par les équations 3.4.4 et 3.4.5.

La loi de comportement incrémentale élastoplastique est donnée par la relation suivante

$$\dot{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 5.2.2$$

où les tenseurs de rigidité élastique et plastique sont de la forme

$$C_{ijkl}^e = G_s (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad 5.2.3$$

$$C_{ijkl}^p = \frac{\langle \mathbf{1} \rangle}{H} C_{mnij}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}^e = G_s \frac{\langle \mathbf{1} \rangle}{H} (s_{ij}/T + k\beta \delta_{ij})(s_{kl}/T + k\mu \delta_{kl}) \quad 5.2.4$$

avec

$$k = 1/(1-2\nu) \quad ; \quad H = 1 + (q-p) \frac{1}{G_s} \frac{d\mu}{dg^p} + k\mu\beta \quad 5.2.5$$

### V.2.2 Comportement hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire (modèle complet)

Le critère de plasticité et le potentiel plastique s'écrivent sous la forme

$$F = T - (q-p)\mu(g^p, p) \quad ; \quad Q = T - (q-p)\beta(g^p, p) \quad 5.2.6$$

où  $\mu$  et  $\beta$  représentent les coefficients de frottement et de dilatance correspondants, et dont les expressions pour le modèle complet sont données par les équations 3.3.8 et 3.3.15.

La loi de comportement incrémentale hyperélastique linéaire avec endommagement ( $G_s = G_s(T, p, g^p)$ ) et plasticité non linéaire ( $\mu$  et  $\beta$  dépendent de la pression moyenne  $p$ ) est donnée par la relation suivante

$$\dot{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^d) \dot{\epsilon}_{kl} + \left( E_{ij} Q_g \frac{\langle \mathbf{1} \rangle}{H} B_{kl} \right) \dot{\epsilon}_{kl} \quad 5.2.7$$

où les tenseurs de rigidité hyperélastique, plastique et d'endommagement sont de la forme

$$C_{ijkl}^e = G_s \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(1+\nu) \frac{\xi}{1-\xi} \frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{\sigma_e^2} \right) \quad ; \quad \xi = \frac{\sigma_e}{G_s} \frac{dG_s}{d\sigma_e} \quad 5.2.8$$

$$C_{ijkl}^p = \frac{\langle \triangleright \rangle}{H} C_{mnij}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}^e = G_s \frac{\langle \triangleright \rangle}{H} (s_{ij}/T + k\beta\delta_{ij})(s_{kl}/T + k\mu\delta_{kl}) \quad 5.2.9$$

$$C_{ijkl}^d = \frac{\langle \triangleright \rangle}{H} \frac{\sigma_{ij}}{G_s} \frac{\partial G_s}{\partial g^p} Q_g B_{kl} \quad 5.2.10$$

Le couplage entre hyperélastoplasticité et endommagement affecte le module d'écroutissage  $H$

$$H = 1 + (q - p) \frac{1}{G_s} \frac{d\mu}{dg^p} + k\mu\beta + \tilde{H} \quad 5.2.11$$

où

$$\tilde{H} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\sigma_{ij}}{G_s} \frac{\partial G_s}{\partial g^p} \quad 5.2.12$$

## V.3 Théorie des milieux continus granulaires biphasiques

### V.3.1 Quelques considérations statiques

L'étude du champ induit par un écoulement à travers un milieu poreux a été introduite par Terzaghi [1936], puis par Biot [1956] en supposant que le comportement de la roche saturée est complètement fonction de la contrainte effective définie par

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad \text{et} \quad p > 0 \quad 5.3.1$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes totales et  $p$  la pression du fluide.

Biot [1956] a pris en considération les déformations d'un matériau dont la matrice solide remplit la totalité du volume occupé par la roche saturée mais la pression du fluide interstitiel

n'est définie qu'à l'intérieur du milieu poreux interconnecté. Ainsi le comportement de la roche saturée serait complètement fonction de la contrainte effective définie par

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - n p \delta_{ij} \quad 5.3.2$$

où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes totales,  $p$  la pression de pore et  $n$  la porosité de la roche.

Bien que la notion classique de contrainte effective ne constitue pas une loi physique rigoureuse, elle présente une approximation réaliste lorsque certaines conditions sont satisfaites, par exemple si la pression interstitielle ne génère pas de concentrations de contraintes (espace des pores entièrement interconnecté, matériau relativement homogène) et ne modifie pas le comportement rhéologique de la matrice solide (Cornet [1977]).

### V.3.2 Equations du mouvement et lois de comportement

Soit une roche poreuse saturée par un fluide, dans une configuration donnée, sujette à une déformation infinitésimale. Il est admis que durant le processus de déformation les différentes propriétés mécaniques de la roche changent très peu. Soit  $\Delta u_i^{(\alpha)}$  représentant le déplacement incrémental de la roche ( $\alpha=1$ ) et du fluide ( $\alpha=2$ ). La vitesse des constituants et la déformation de la matrice de la roche sont donnés par les relations suivantes

$$v_i^{(\alpha)} = \Delta u_{i,t}^{(\alpha)} \quad ; \quad \Delta \varepsilon_{ij} = (\Delta u_{i,j}^{(1)} + \Delta u_{j,i}^{(1)})/2 \quad 5.3.3$$

Le mouvement relatif du fluide par rapport à la matrice de la roche est mesuré par le débit (Marle [1967], Verruijt [1969] et Harr [1981])

$$q_i = n(v_i^{(2)} - v_i^{(1)}) \quad 5.3.4$$

Pour une roche incompressible saturée par un fluide incompressible, les équations d'équilibre des masses (Salençon [1989] et Duvaut [1990]) se réduisent à



$$\Delta n_t = (1-n)v_{kk}^{(1)} \quad ; \quad -q_{ij} = v_{kk}^{(1)} \quad 5.3.5$$

Les équations 5.3.5 expriment le fait que, pour une roche incompressible, le changement de volume est uniquement dû à la variation de la porosité.

L'état de contraintes est décrit par le tenseur de Cauchy  $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}$ , où  $\Delta\sigma_{ij}$  représente l'incrément de contrainte. L'équation d'équilibre des moments est donnée par

$$\Delta\sigma_{ij,j} = \rho_1 v_{it}^{(1)} + \rho_2 v_{it}^{(2)} \quad 5.3.6$$

La contrainte incrémentale effective de Terzaghi peut s'écrire sous la forme

$$\Delta\sigma'_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \Delta p \delta_{ij} \quad 5.3.7$$

Les équations du mouvement, pour chacune des deux phases (solide ou fluide), peuvent donc être exprimées en fonction de la contrainte effective et de la pression incrémentale

$$\Delta\sigma'_{ij,j} = -f_i + (1-n)(\rho_s - \rho_l)v_{it}^{(1)} - (1-n)\rho_l(v_{it}^{(2)} - v_{it}^{(1)}) \quad 5.3.8$$

$$-\Delta p_{,j} = f_j + \rho_l v_{it}^{(2)} \quad 5.3.9$$

où  $n$ ,  $\rho_s$  et  $\rho_l$  représentent respectivement la porosité de la roche, la densité de la roche et la densité du fluide.

La loi, de comportement des fluides, de Darcy généralisée peut être utilisée pour identifier la force d'écoulement  $f_i$  qui apparaît dans les équations d'équilibre (5.3.8 et 5.3.9). Pour un écoulement laminaire, la force d'écoulement  $f_i$  est proportionnelle au débit

$$f_i = b q_i \quad ; \quad b = \frac{\rho_l \eta_k}{k} \quad 5.3.10$$

où  $k$  représente la perméabilité de la roche (Taylor [1948]), et  $\eta_k$  la viscosité cinématique du fluide.

Le système d'équations constitutives 5.3.5, 5.3.8, 5.3.9 et 5.3.10 peut être complété par une loi de comportement incrémentale (voir second paragraphe) pour la roche, de la forme

$$\Delta \sigma'_{ij} = C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad 5.3.11$$

## V.4 Etude des contraintes autour d'un forage

### V.4.1 Puits en phase de creusement

Pour étudier les contraintes autour d'un forage durant la phase de creusement, nous proposons le modèle décrit sur la figure 5.1 sous les conditions suivantes

- \* La roche (grès de Wildmoor) est perméable, isotrope et saturée avec un fluide incompressible.
- \* Les grains constituant la roche sont également incompressibles.
- \* La perméabilité est supposée constante.
- \* La déformation axiale est négligée.

En déformation plane, les équations constitutives incrémentales pour un matériau isotrope sont de la forme (paragraphe V.2)

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr} &= C_{11} \dot{\epsilon}_{rr} + C_{12} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= C_{21} \dot{\epsilon}_{rr} + C_{22} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} \\ \dot{\sigma}_{r\theta} &= 2G_s \dot{\epsilon}_{r\theta} \end{aligned} \quad 5.4.1$$

La pression du fluide est maintenue constante:  $p = p_r$  5.4.2

La contrainte effective radiale est réduite sur le bord du forage de  $\sigma'_\infty$  à 0

$$\sigma'_r(r_1) = 0 \quad ; \quad \sigma'_r(\infty) = -\sigma'_\infty \quad 5.4.3$$

Le champ de contraintes autour du forage en phase de creusement est donné par l'équation d'équilibre suivante

$$\frac{d\sigma_r'}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r' - \sigma_\theta') = 0 \quad 5.4.4$$

Pour résoudre l'équation 5.4.4, nous allons procéder à une discrétisation de l'espace entourant le forage en N anneaux avec pour le  $i^{\text{ème}}$  anneau un rayon interne  $r_i$  et un rayon externe  $r_{i+1}$  (figure 5.2).

Pour l'anneau (i) l'équation d'équilibre 5.4.4 et les équations incrémentales 5.4.1 donnent une équation différentielle pour l'incrément de déplacement  $\Delta u_r$

$$C_{11} \frac{d^2}{dr^2}(\Delta u_r) + (C_{11} + C_{12} - C_{21}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\Delta u_r) - C_{22} \frac{\Delta u_r}{r^2} = 0 \quad 5.4.5$$

La solution de l'équation 5.4.5 est de la forme

$$\Delta u_r = A_1 r^{\beta_1} + A_2 r^{\beta_2} \quad 5.4.6$$

où  $A_1$ ,  $A_2$  sont les constantes d'intégration et  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  sont les racines de l'équation caractéristique

$$C_{11}\beta^2 + (C_{12} - C_{21})\beta - C_{22} = 0 \quad 5.4.7$$

A partir des conditions de continuité des contraintes et des déformations radiales, on obtient une relation de récurrence entre  $A_1^i$ ,  $A_2^i$  pour l'anneau (i) et  $A_1^{i-1}$ ,  $A_2^{i-1}$  pour l'anneau (i-1).

En utilisant les conditions aux limites en  $r=r_1$  ( $\Delta \sigma_r'(r_1)=0$ ) et en  $r=r_{N+1}$  ( $\Delta u_r=0$ ) les champs de contraintes et de déformations peuvent être calculés à chaque incrément de pas.

Un programme fortran, pour le calcul du champ de contrainte en phase de creusement d'un puits, a été développé au CERMES. Ce programme tient compte de deux modèles de comportement pour le grès de Wildmoor le modèle simplifié et le modèle complet.

En considérant l'état initial  $\sigma'_\infty=45\text{MPa}$  et  $p_r=15\text{MPa}$ , nous avons représenté sur la figure 5.3 l'état des contraintes ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  et  $p$ ) autour du forage en phase de creusement pour différents modèles de comportement du grès de Wildmoor (élasticité linéaire, modèle simplifié et modèle complet). On remarque que la valeur maximale du déviateur des contraintes  $|\sigma_r-\sigma_\theta|$  se situe au niveau de la paroi interne du forage, par conséquent c'est au niveau de cette paroi que le risque de rupture est le plus élevé. On constate également que, pour les modèles simplifié et complet, la contrainte tangentielle  $\sigma_\theta$  devient inférieure en intensité à celle obtenue à partir de l'élasticité linéaire; cet état de fait est dû à l'amollissement du matériau vers la paroi interne du forage (le module d'Young du grès diminue lorsque les déformations augmentent).

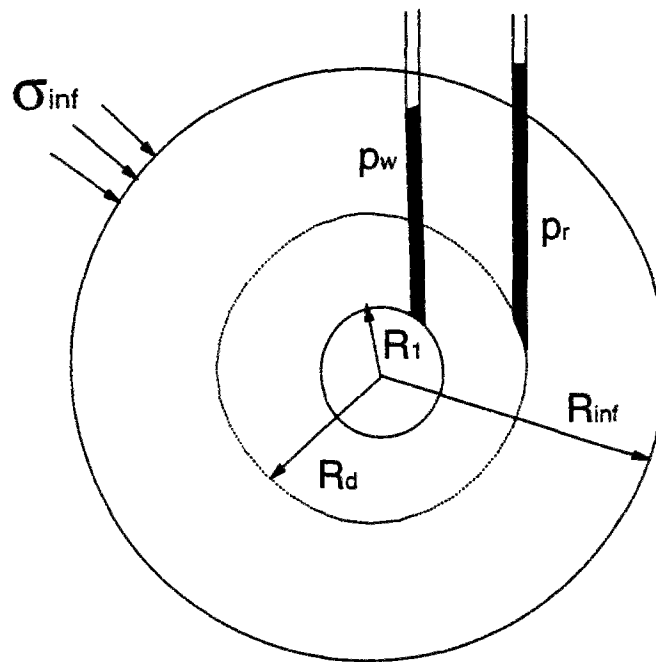


Figure 5.1: Illustration des contraintes autour d'un forage en phase de creusement ( $p_r = p_w = \text{constante}$ ) (Sulem et Vardoulakis [1989])

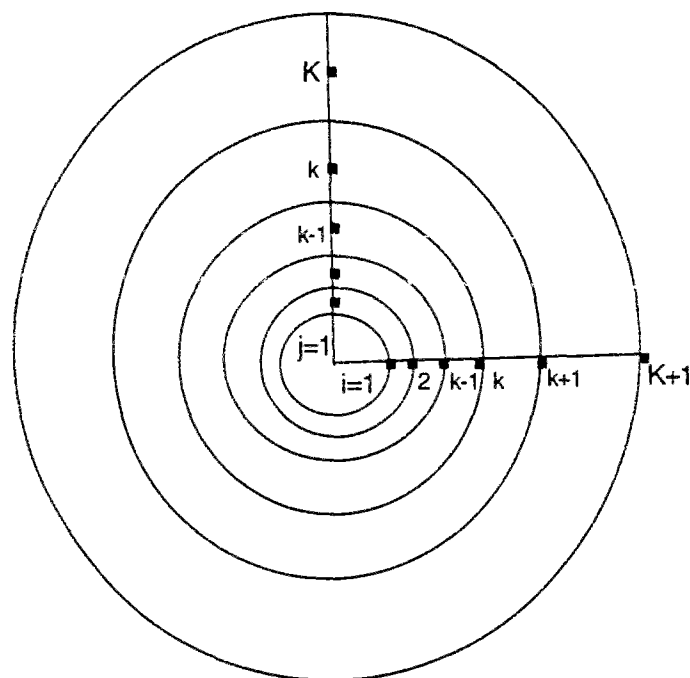


Figure 5.2: Représentation de la discrétisation de l'espace entourant le forage (Sulem et Vardoulakis [1989])

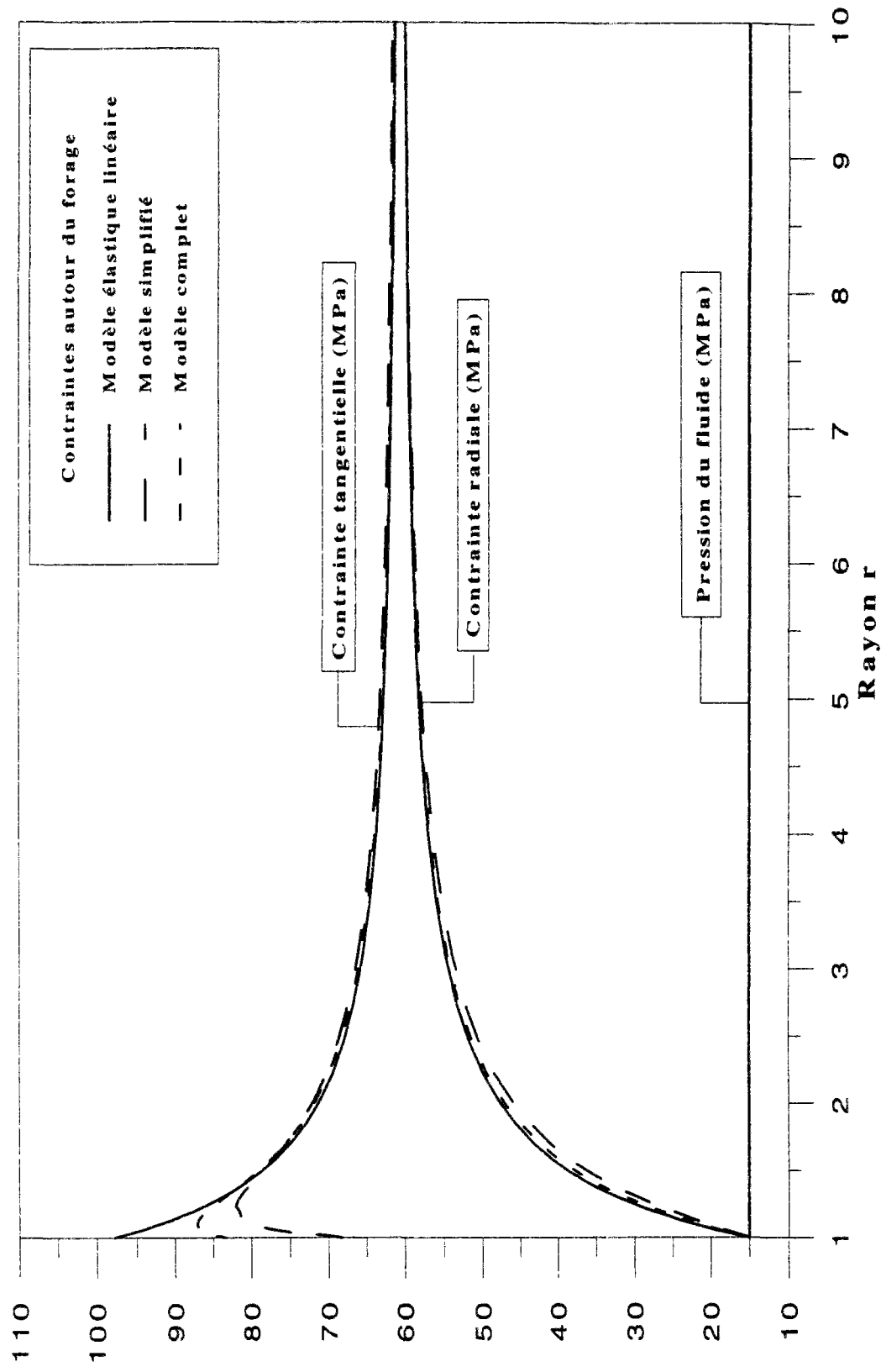


Figure 5.3: Représentation des contraintes autour du forage pour le modèle élastique linéaire, le modèle élastoplastique linéaire et élastoplastique non-linéaire avec endommagement

### V.4.2 Puits en phase de production

Pour étudier le champ de contraintes autour d'un forage en cours de production nous utilisons le même modèle que précédemment (figure 5.1), par contre la pression du fluide en  $r=r_1$  est réduite de  $p_r$  (pression dans le réservoir) à une pression  $p_w < p_r$  qui reste constante par la suite. Il est admis qu'à une distance finie  $r_d$  (rayon de drainage augmentant avec le temps) du bord du forage la pression du fluide est égale à la pression initiale  $p_r$ . De plus on suppose que l'écoulement du fluide est continu entre le rayon de drainage et le bord du forage. On en déduit donc que le profil de la pression est indépendant des propriétés de la roche et du fluide

$$p = p_w + (p_r - p_w) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_d/r_1)} \quad 5.4.8$$

En phase de production, nous avons les conditions aux limites suivantes

$$\begin{array}{lll} \text{en} & r=r_1 & \sigma'_r(r_1)=0 \\ \text{en} & r=r_d & p(r_d)=p_r \\ \text{en} & r=\infty & \sigma'_r(\infty)=-\sigma'_\infty \end{array} \quad 5.4.9$$

A partir des relations 5.4.4 et 5.4.9 nous obtenons l'équation d'équilibre suivante

$$\frac{d\sigma'_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma'_r - \sigma'_\theta) + \frac{p_r - p_w}{\ln(r_1/r_d)} \frac{1}{r} = 0 \quad 5.4.10$$

Pour résoudre l'équation 5.4.10, nous allons procéder (comme pour la phase de creusement) à une discrétisation de l'espace entourant le forage en  $N$  anneaux avec pour le  $i^{\text{ème}}$  anneau un rayon interne  $r_i$  et un rayon externe  $r_{i+1}$  (figure 5.2).

Pour l'anneau (i) l'équation d'équilibre 5.4.10 et les équations incrémentales 5.4.1 donnent une équation différentielle pour l'incrément de déplacement  $\Delta u_i$ ,

$$C_{11} \frac{d^2}{dr^2}(\Delta u_r) + (C_{11} + C_{12} - C_{21}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\Delta u_r) - C_{22} \frac{\Delta u_r}{r^2} = \frac{\Delta p_j}{\ln(r_d/r_1)} \frac{1}{r} \quad 5.4.11$$

La solution de l'équation 5.4.11 est de la forme

$$\Delta u_r = A_1 r^{\beta_1} + A_2 r^{\beta_2} + \frac{\Delta p_j}{\ln(r_d/r_1)} \frac{1}{C_{11} - C_{22} + C_{12} - C_{21}} \frac{1}{r} \quad 5.4.12$$

où  $A_1$ ,  $A_2$  sont les constantes d'intégration et  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  sont les racines de l'équation caractéristique

$$C_{11}\beta^2 + (C_{12} - C_{21})\beta - C_{22} = 0 \quad 5.4.13$$

A partir des conditions de continuité des contraintes et des déformations radiales, on obtient une relation de récurrence entre  $A_1^i$ ,  $A_2^i$  pour l'anneau (i) et  $A_1^{i-1}$ ,  $A_2^{i-1}$  pour l'anneau (i-1).

En utilisant les conditions aux limites 5.4.9 les champs de contraintes et de déformations peuvent être calculés à chaque incrément de pas.

Un programme fortran, pour le calcul du champ de contrainte en phase de production d'un puits, a été développé au CERMES.

La phase de production est simulée par la diminution de la pression sur la paroi du forage de  $p_r = 15 \text{ MPa}$  à  $p_w = 3 \text{ MPa}$ . On remarque sur la figure 5.4 que le gradient de pression ( $\delta p = p_r - p_w$ ) a tendance à faire augmenter la valeur du déviateur des contraintes  $|\sigma_r - \sigma_\theta|$ , ce qui augmente le risque de rupture.

Sur la figure 5.5 on constate que plus le rayon de drainage  $r_d$  (figure 5.1) est petit plus la valeur du déviateur des contraintes est grande, ceci montre que c'est à l'ouverture du puits que les conditions sont les plus défavorables.



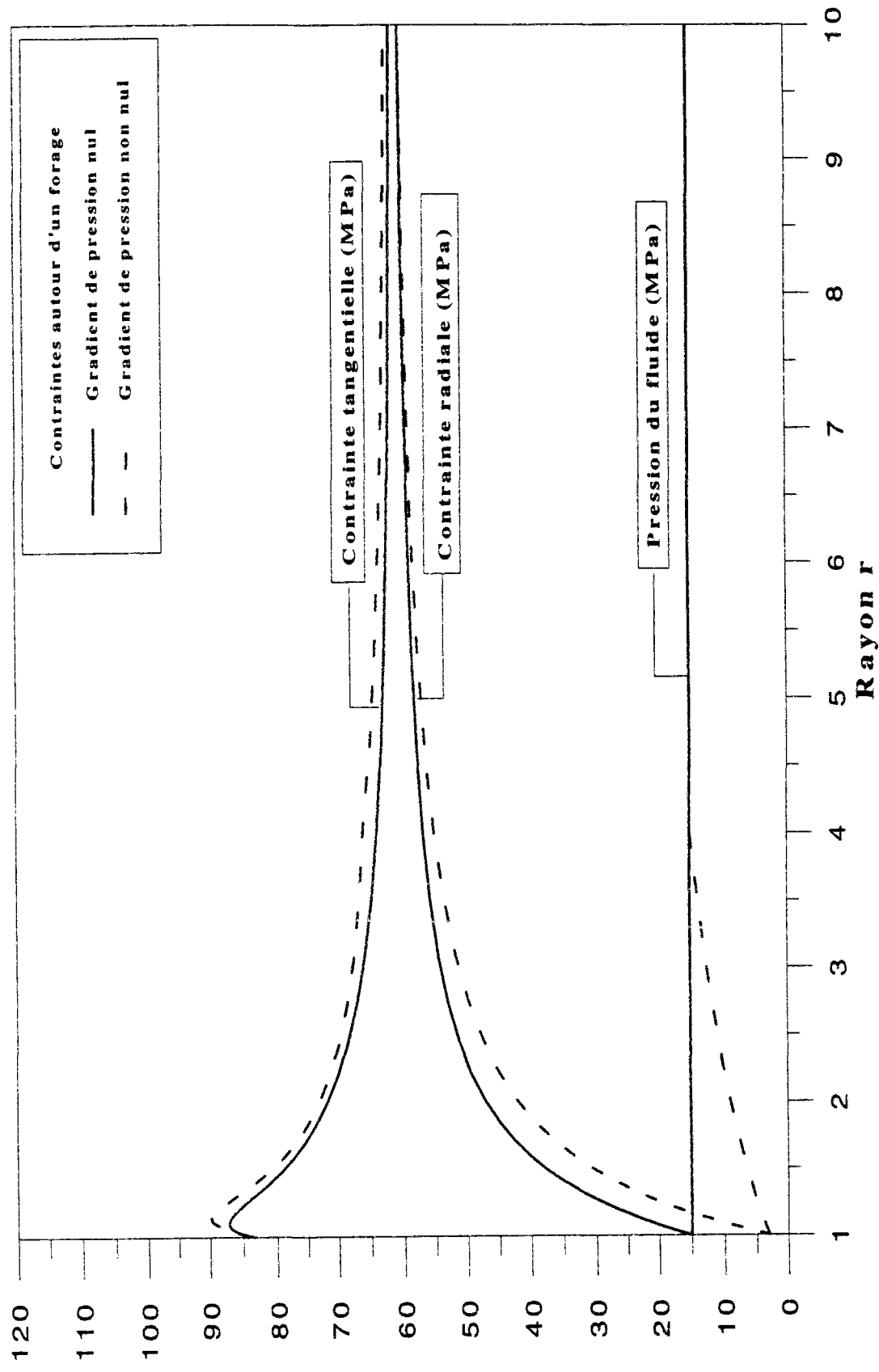


Figure 5.4: Représentation du champ de contraintes en phase de creusement et de production (modèle simplifié)

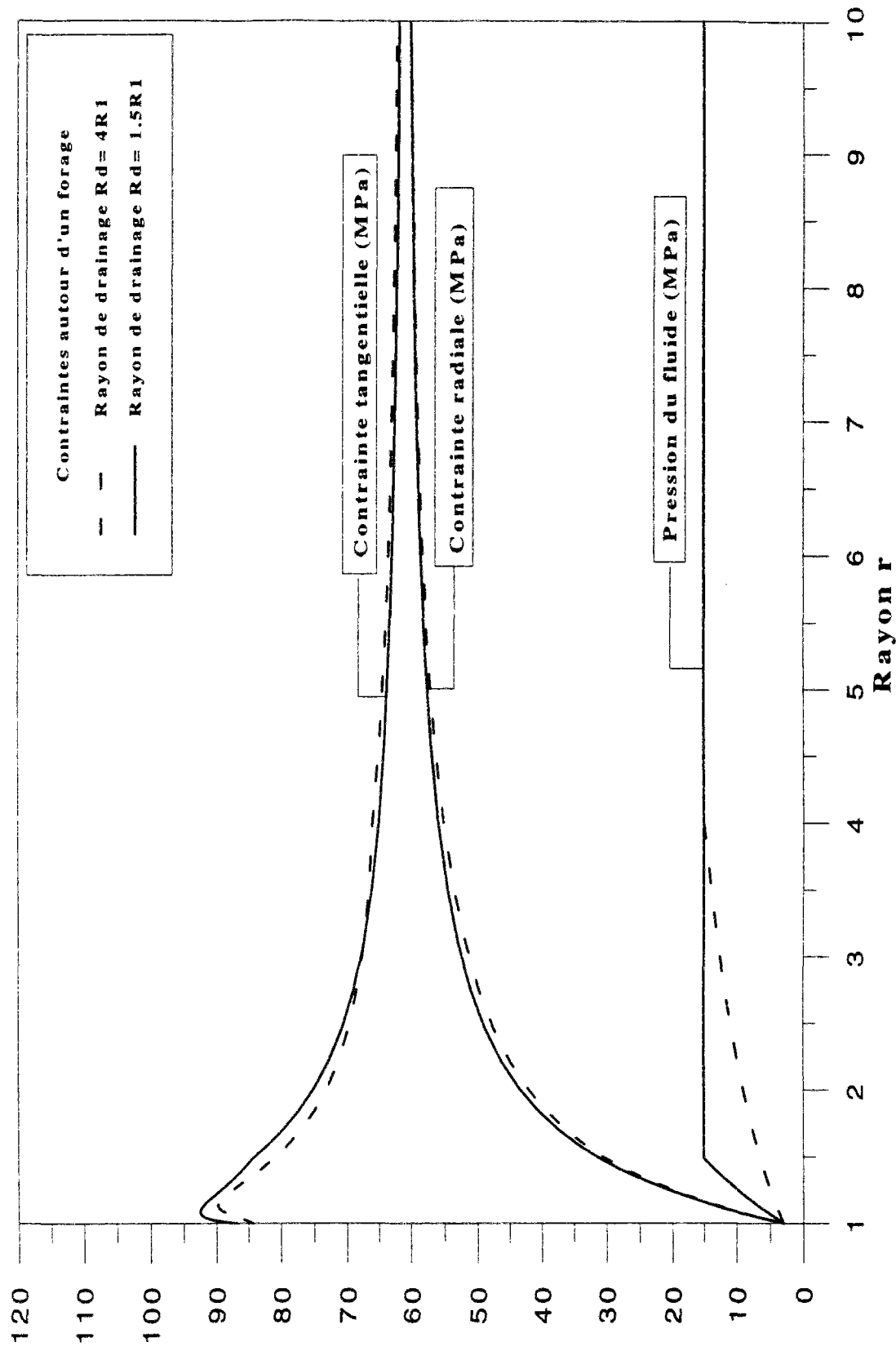


Figure 5.5: Représentation du champ de contraintes en phase de production et influence du rayon de drainage (modèle simplifié)

## V.5 Analyse en bifurcation de la stabilité de la paroi d'un forage

### V.5.1 Introduction

Le phénomène de rupture des parois de puits en cours de production peut être étudié en utilisant la théorie des bifurcations. Dans le cas d'un forage profond deux modes de bifurcation peuvent apparaître (figure 5.7), un mode localisé (formation de bandes de cisaillement à la paroi) et un mode diffus (gauchissement ou flambement de la paroi). Le mode de bifurcation diffuse provoque des phénomènes d'écaillage des parois par activation et propagation instable des fissures préexistantes parallèles à la paroi (phénomène de production de sable), cet état critique de bifurcation dépend du chemin de contrainte et des conditions limites du problème. L'analyse de stabilité des parois d'un forage profond par la théorie des bifurcations permet de décrire et de prédire l'apparition des différents modes de rupture observés. Pour simplifier le problème de l'analyse en bifurcation de la stabilité d'un forage nous avons considéré un élément de volume à la paroi du forage comme une bande infinie chargée par  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  (figure 5.6), par la suite nous avons étudié qu'elles sont les conditions aux limites en contraintes pouvant reproduire à la paroi du forage les phénomènes de bifurcation en mode localisé ou diffus.

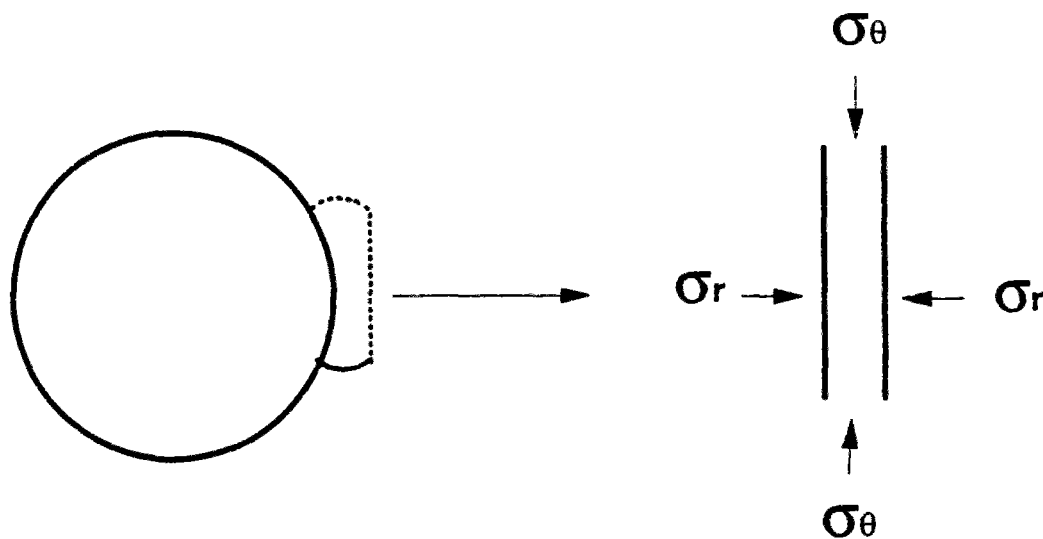


Figure 5.6: Principe d'analyse simplifiée, représentation d'un élément de volume à la paroi du forage considéré comme une bande infini chargée par  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$

Le problème de stabilité est défini comme suit: à chaque instant nous allons étudier l'évolution dans le temps des incréments de déplacements  $\Delta u_i$  et de pression du fluide  $\Delta p_i$  ainsi que le débit  $q_i$ . Les déplacements  $\Delta u_i$  et le débit  $q_i$  sont les deux variables cinématiques qui décrivent respectivement la déformation de la roche et l'écoulement du fluide à travers cette roche.

Le problème est décrit par les équations d'équilibre pour la roche et le fluide, l'équation de continuité pour l'écoulement du fluide et les lois de comportement pour la roche et le fluide (paragraphe V.3.2). En particulier nous allons considérer que l'écoulement du fluide dans une roche poreuse est décrit par la loi de Darcy, quant au comportement de la roche il peut être décrit par la loi d'écoulement élastoplastique (modèle simplifié) ou le modèle hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité et potentiel plastiques non-linéaires (modèle complet) (paragraphe V.2).

Basées sur une théorie des milieux continus granulaires biphasiques, les équations d'équilibre 5.3.8 et 5.3.9 s'écrivent

$$\Delta \sigma'_{11,1} + \Delta \sigma'_{12,2} + 2t \Delta \omega_{,2} = -b q_1 + \rho_1 \Delta u_{1,tt} - (1-n) \rho_2 (\Delta u_{1,tt}^{(2)} - \Delta u_{1,tt}^{(1)}) \quad 5.5.1$$

$$\Delta \sigma'_{21,1} + \Delta \sigma'_{22,2} + 2t \Delta \omega_{,1} = -b q_2 + \rho_1 \Delta u_{2,tt} - (1-n) \rho_2 (\Delta u_{2,tt}^{(2)} - \Delta u_{2,tt}^{(1)}) \quad 5.5.2$$

$$-\Delta p_{,1} = b q_1 + \rho_2 \Delta u_{1,tt}^{(2)} \quad 5.5.3$$

$$-\Delta p_{,1} = b q_2 + \rho_2 \Delta u_{2,tt}^{(2)} \quad 5.5.4$$

Dans les équations 5.5.1 et 5.5.2 nous avons

$$\Delta \omega = (\Delta u_{2,1} - \Delta u_{1,2})/2 \quad 5.5.6$$

$$t = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad 5.5.7$$

Il y a apparition d'un mode de bifurcation diffuse ou localisée lorsqu'en plus du mode de déplacement axysymétrique fondamental, un autre mode de déplacement qui vérifie les conditions aux limites coexiste; les champs de déplacement et de pression représentant ce mode de bifurcation s'écrivent sous la forme

$$\Delta u_i^{(1)} = U_i(x_1, x_2) \exp(ft) \quad 5.5.8$$

$$\Delta u_i^{(2)} = W_i(x_1, x_2) \exp(ft) \quad 5.5.9$$

$$p = P(x_1, x_2) \exp(ft) \quad 5.5.10$$

où  $f$  représente le coefficient de croissance de la perturbation.

A partir des équations de comportement 5.4.1, des relations 5.5.1 à 5.5.10 et 5.3.33 à 5.3.35 nous obtenons les systèmes d'équations suivants

$$\begin{cases} C_{11}U_{1,11} + (G_s - t)U_{1,22} + (C_{12} + G_s + t)U_{2,12} - \alpha U_1 = -\beta W_1 \\ C_{22}U_{2,22} + (G_s + t)U_{2,11} + (C_{21} + G_s - t)U_{1,12} - \alpha U_2 = -\beta W_2 \end{cases} \quad 5.5.11$$

$$\begin{cases} W_{1,1} + W_{2,2} = -(U_{1,1} + U_{2,2})/e \\ W_{1,2} - W_{2,1} = -(U_{2,1} - U_{1,2})/\gamma \end{cases} \quad 5.5.12$$

où

$$\alpha = bnf + f^2(\rho_1 + (1-n)\rho_2) \quad 5.5.13$$

$$\beta = bnf + (1-n)\rho_2 f^2 \quad 5.5.14$$

$$\gamma = 1 + \rho_2 f / (bn) \quad 5.5.15$$

( $n$ ) étant la porosité et ( $e$ ) l'indice des vides.

En utilisant les équations 5.5.12 nous pouvons éliminer  $W_1$  et  $W_2$  des équations 5.5.11, ce qui nous donne le système suivant pour  $U_1$  et  $U_2$

$$\begin{cases} a_1 U_{1,11} + a_2 U_{1,22} + a_4 U_{2,11} + a_5 U_{2,22} - a_3 (U_{1,1} + U_{2,2}) = 0 \\ b_1 U_{1,12} + b_2 U_{1,22} - b_4 U_{2,11} + b_5 U_{2,12} + b_3 (U_{2,1} - U_{1,2}) = 0 \end{cases} \quad 5.5.16$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{11} & a_2 &= C_{21} + 2(G_s - t) & a_3 &= \alpha + \beta/e \\ a_4 &= C_{12} + 2(G_s + t) & a_5 &= C_{22} \end{aligned} \quad 5.5.17$$

et

$$b_1 = C_{11} - C_{21} - (G_s - t) \quad ; \quad b_2 = G_s - t \quad ; \quad a_3 = \alpha - \beta/\gamma$$

$$b_4 = G_s + t \quad ; \quad b_5 = C_{12} - C_{22} + (G_s + t)$$

5.5.18

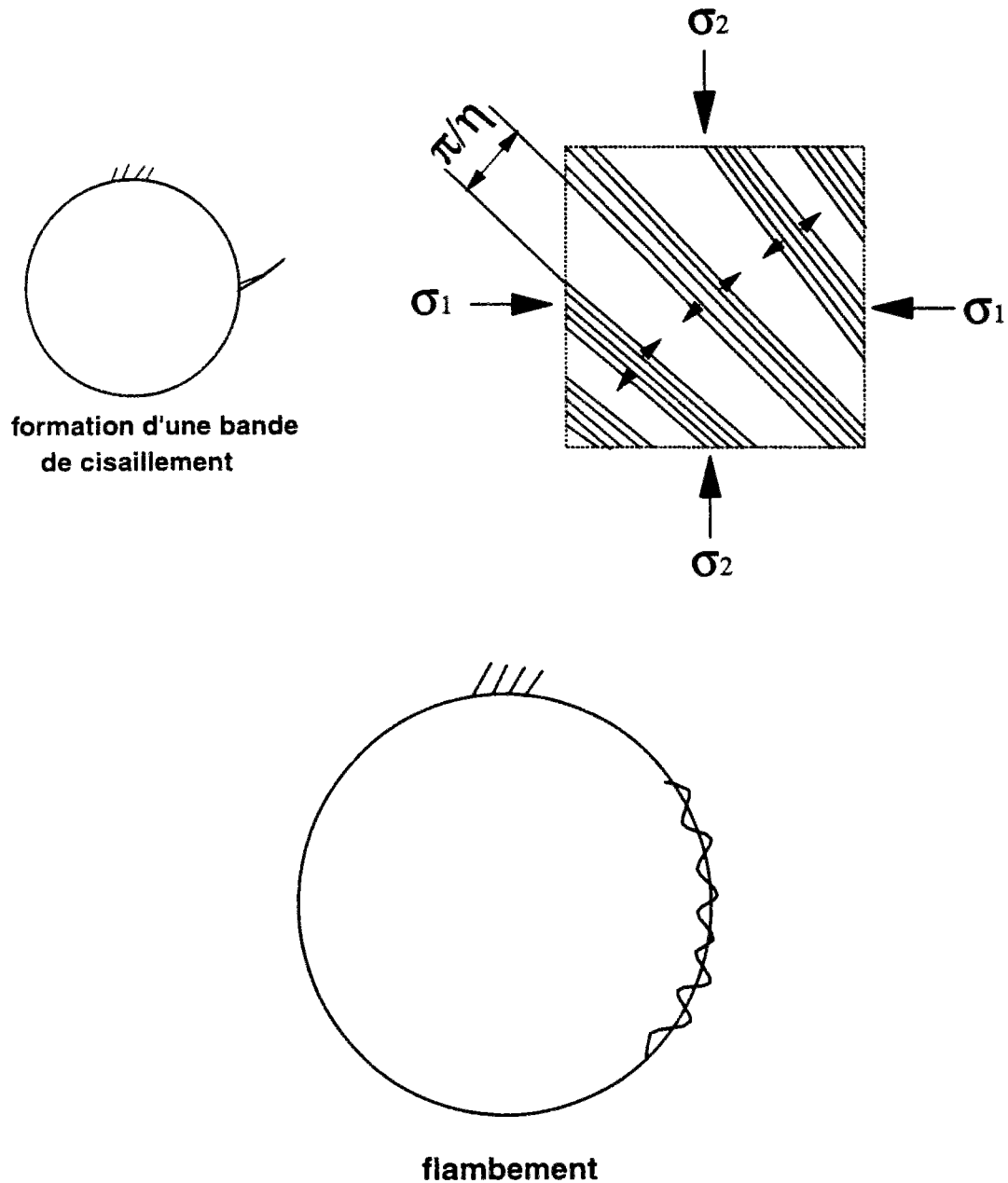


Figure 5.7: Modes de rupture d'un puits (a) formation de bande de cisaillement, (b) flambement (Sulem et Vardoulakis [1988])

### V.5.2 Bifurcation en mode localisé ou instabilité de volume

Pour étudier l'instabilité de volume (formation de bandes de cisaillement) on cherche les conditions d'existence d'un champ de déplacement non-homogène constant le long de bandes parallèles (figure 5.7), on considère de petites perturbations à partir d'un état d'équilibre et on étudie l'évolution en temps du taux d'accroissement  $f$  de ces perturbations

$$\begin{aligned} U_1 &= A \sin(\eta y) e^{ft} \\ U_2 &= B \sin(\eta y) e^{ft} \end{aligned} \quad 5.5.19$$

où  $\eta$  est un nombre d'onde (Vardoulakis [1989]) et

$$y = n_1 x_1 + n_2 x_2 \quad 5.5.20$$

A partir des équations 5.5.16, 5.5.19 et 5.5.20 on obtient le système d'équations linéaires homogène suivant

$$\begin{cases} A n_2 [(a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2) \eta^2 + a_3] + B n_2 [(a_4 n_1^2 + a_5 n_2^2) \eta^2 + a_3] = 0 \\ A n_2 [(b_1 n_1^2 + b_2 n_2^2) \eta^2 + b_3] + B n_1 [(-b_4 n_1^2 + b_5 n_2^2) \eta^2 - b_3] = 0 \end{cases} \quad 5.5.21$$

Pour ne pas avoir de solutions triviales ((A,B)=0), le déterminant du système linéaire 5.5.21 doit être égal à zéro. On en déduit l'équation polynomiale caractéristique pour le coefficient de croissance  $f$

$$B_0 f^5 + B_1 f^4 + B_2 f^3 + B_3 f^2 + B_4 f + B_5 = 0 \quad 5.5.22$$

où

$$\begin{aligned} B_0 &= c_4 c_1 \\ B_1 &= c_1 c_3 + c_2 c_4 \\ B_2 &= c_3 c_2 + (c_1 c_5 A_2 + c_4 A_3) \eta^2 \end{aligned} \quad 5.5.23$$

$$B_3 = ((c_1 + c_2 c_5) A_2 + c_3 A_3) \eta^2$$

$$B_4 = c_2 A_2 \eta^2 + c_5 A_1 \eta^4$$

$$B_5 = A_1 \eta^4$$

avec

$$c_1 = \rho_1 + \rho_2 / e \quad ; \quad c_2 = b \quad ; \quad c_3 = \rho_1 + \rho_2$$

5.5.24

$$c_4 = \rho_2 (\rho_1 + (1-n) \rho_2) / bn \quad ; \quad c_5 = \rho_2 / bn$$

et

$$A_1 = n_2^2 (a_4 n_1^2 + a_5 n_2^2) (b_1 n_1^2 + b_2 n_2^2) + n_1^2 (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2) (b_4 n_1^2 - b_5 n_2^2)$$

$$A_2 = n_1^2 (b_4 n_1^2 - b_5 n_2^2) + n_2^2 (b_1 n_1^2 + b_2 n_2^2)$$

5.5.25

$$A_3 = n_2^2 (a_4 n_1^2 + a_5 n_2^2) + n_1^2 (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2)$$

A partir d'un état donné des paramètres d'écrouissage il est possible de déterminer le coefficient de croissance de la perturbation  $f$  par rapport au nombre d'onde  $\eta$ . Cette démarche nous montre qu'il existe une valeur critique de l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g_{cr}^p$  pour laquelle

$$\text{si } g^p < g_{cr}^p \quad f < 0 \quad \text{pour tout } \eta \quad (\text{régime stable})$$

$$\text{si } g^p > g_{cr}^p \quad f > 0 \quad \text{pour tout } \eta \quad (\text{régime instable})$$

Pour les paramètres des matériaux nous avons choisi les valeurs suivantes

densité de la roche:  $2 \text{ g/cm}^3$  ; densité du fluide:  $0.7 \text{ g/cm}^3$

porosité de la roche: 30 % ; perméabilité de la roche: 100 md

viscosité dynamique du fluide: 1 cP ; contrainte à l'infini: 45 Mpa



Pour déterminer le  $g_{cr}^p$  optimum; nous allons tracer la courbe  $g^p(\theta)$  (figure 5.8) et voir pour quelle valeur minimale de  $g^p$  le coefficient  $f$  change de signe, ceci pour différentes valeurs du paramètre de dilataance  $\beta$  (car l'instabilité de volume dépend essentiellement de  $\beta$ )

$\beta=0$  matériau incompressible (pas de déformation volumique plastique)

$\beta=\mu$  loi de normalité

$\beta \neq \mu$

Sur la figure 5.8 on remarque que les instabilités de volume se produisent plutôt lorsque  $\beta=0$  avec un angle d'inclinaison des bandes de cisaillement plus petit par rapport à la loi de normalité  $\beta=\mu$ .

Sur les figures 5.9, 5.10 et 5.11 nous avons représenté l'évolution du coefficient de croissance  $f$  en fonction de  $\eta$  pour différentes valeurs de  $\beta$ , on remarque que juste avant ( $g^p < g_{cr}^p$ ) et juste après ( $g^p > g_{cr}^p$ ) la valeur critique de bifurcation  $g_{cr}^p$  on a bien  $f < 0$  pour tout  $\eta$  en régime stable et  $f > 0$  pour tout  $\eta$  en régime instable.

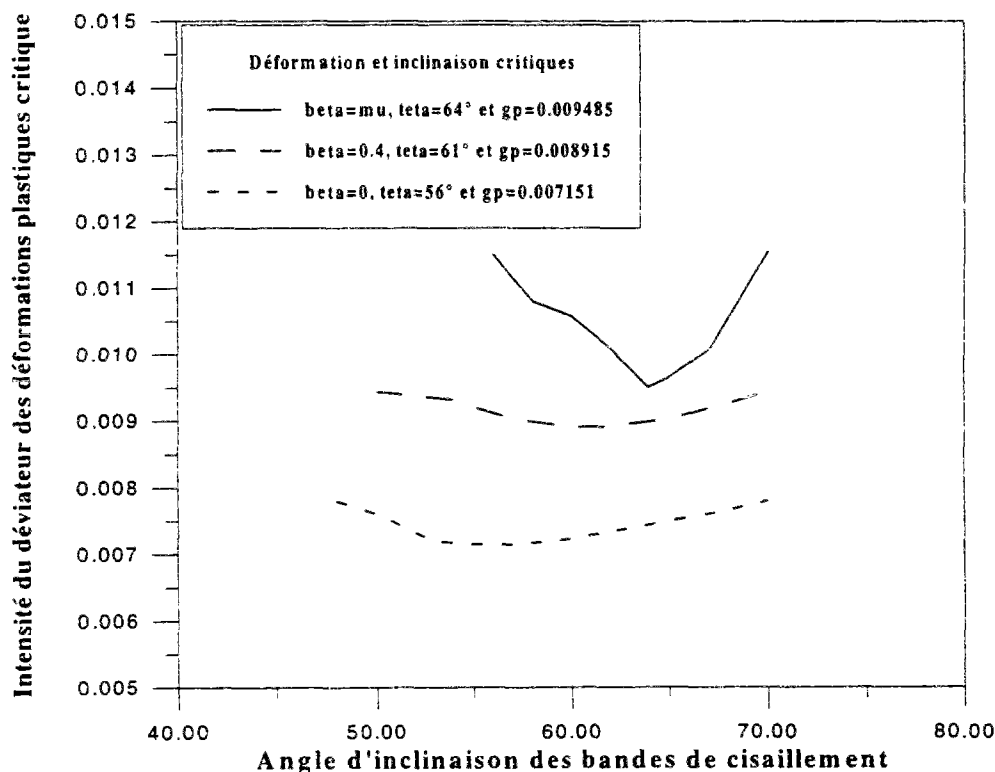


Figure 5.8: Représentation de  $g_{cr}^p$  en fonction de l'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement (modèle simplifié)

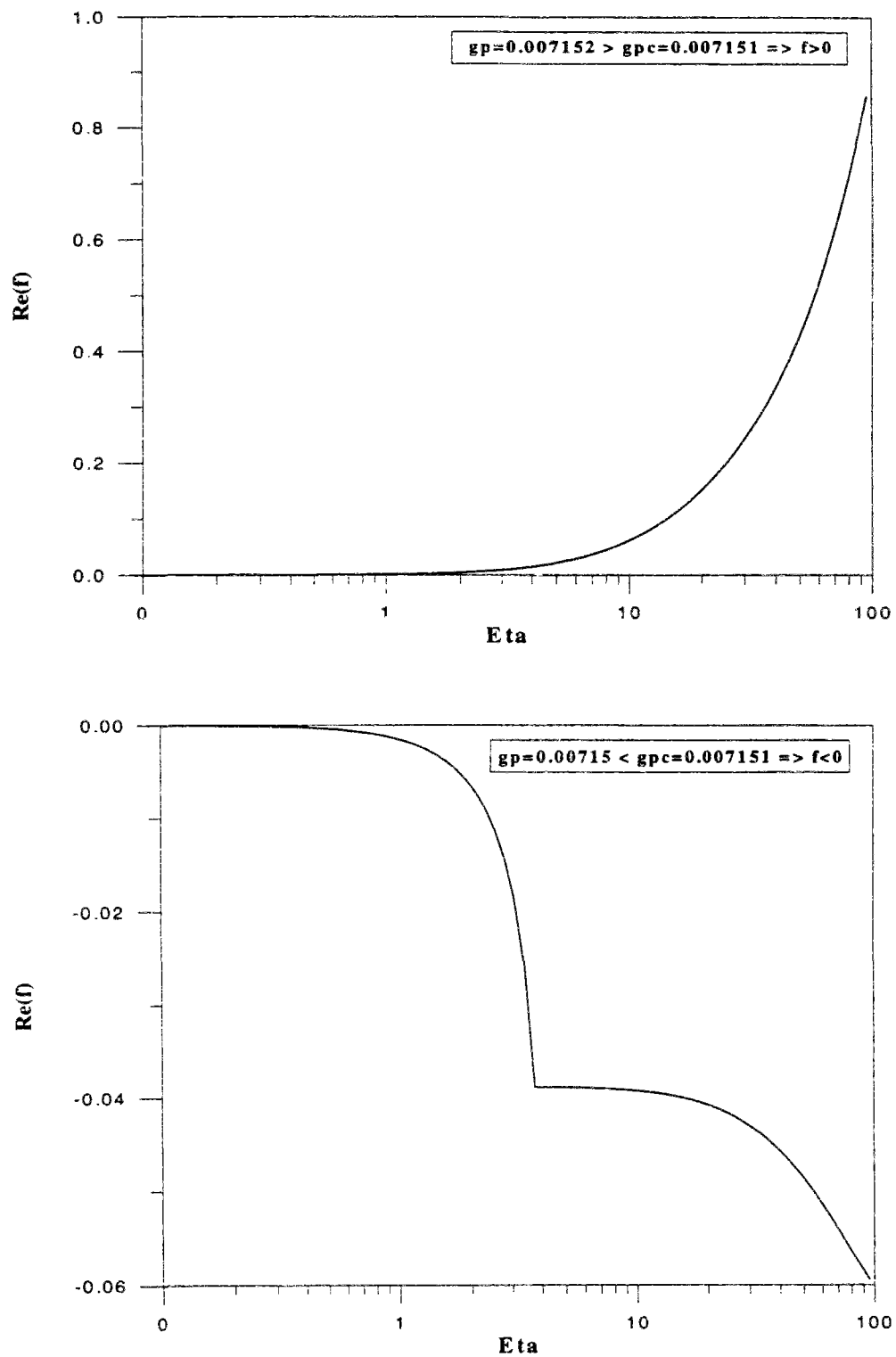


Figure 5.9: Représentation de l'évolution du coefficient de croissance  $f$  en fonction de  $\eta$  pour  $\beta=0$  (modèle simplifié)

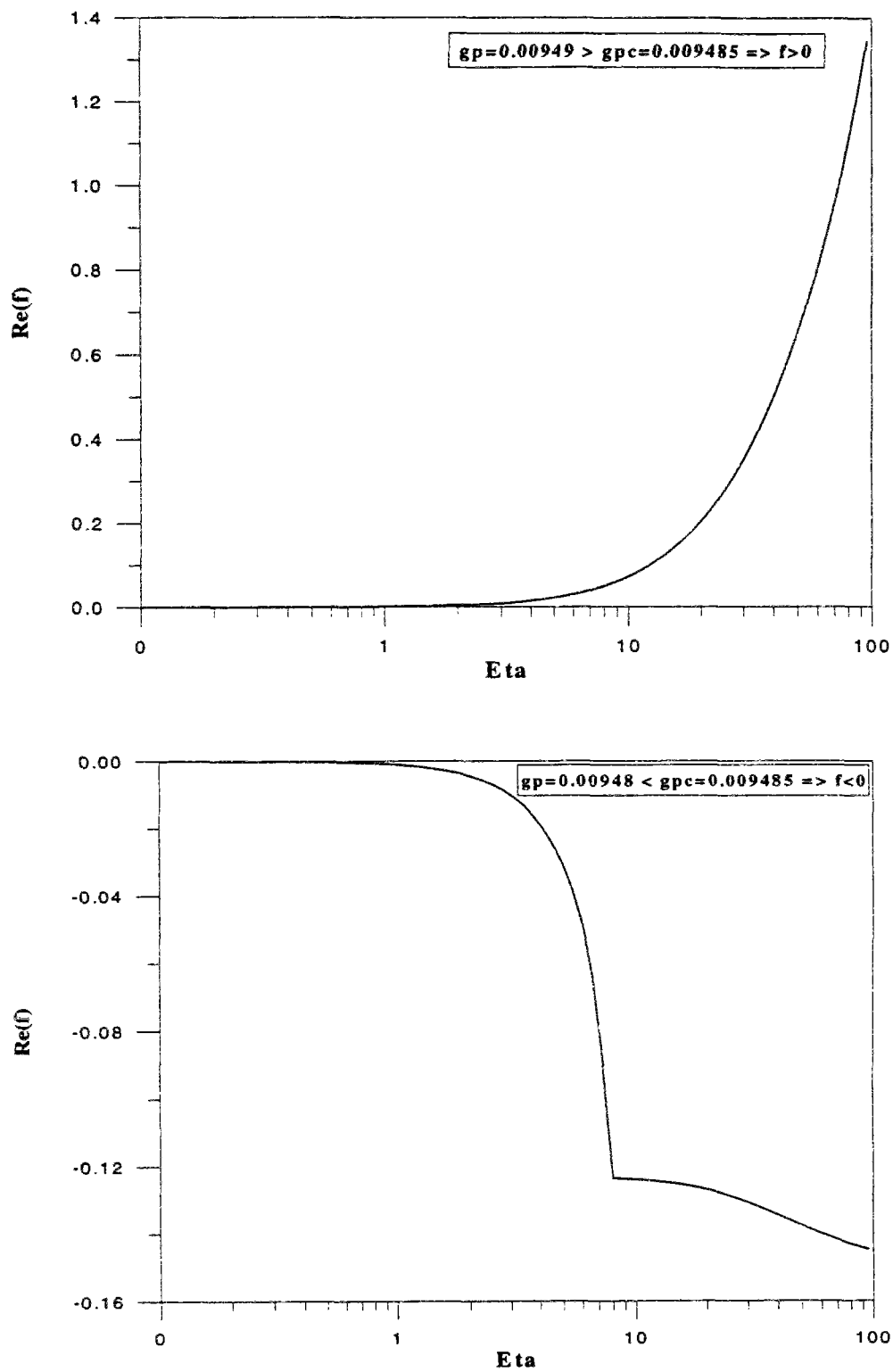


Figure 5.10: Représentation de l'évolution du coefficient de croissance  $f$  en fonction de  $\eta$  pour  $\beta = \mu$  (modèle simplifié)

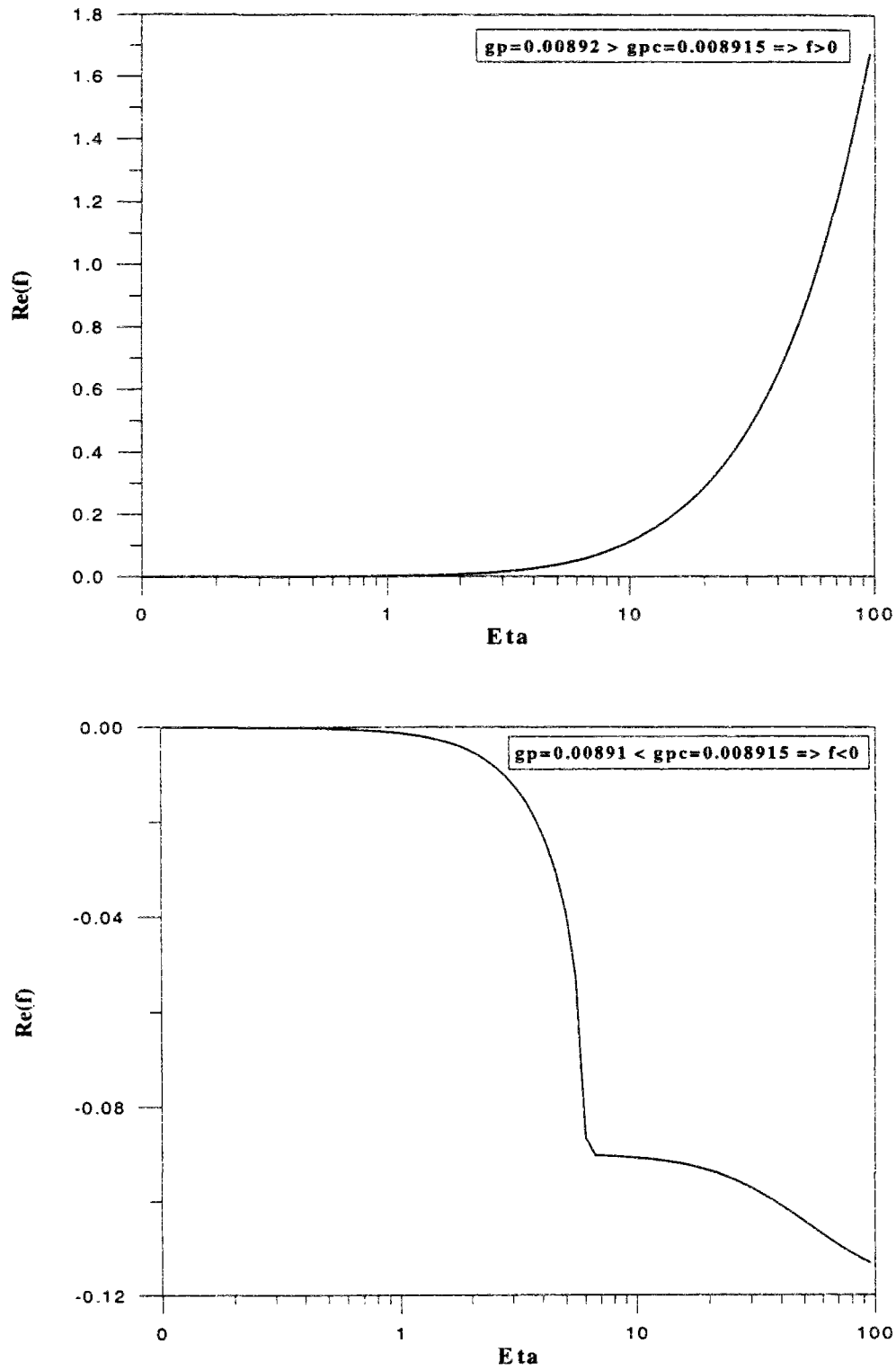


Figure 5.11: Représentation de l'évolution du coefficient de croissance  $f$  en fonction de  $\eta$  pour  $\beta \neq \mu$  (modèle simplifié)

### V.5.3 Bifurcation en mode diffus ou instabilité de surface

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à un autre mode de bifurcation, l'instabilité de surface (flambement). Nous étudierons deux sortes de conditions aux limites à la paroi du forage, la surface perméable et la surface imperméable et nous considérerons les fonctions  $U_1$  et  $U_2$  de la forme suivante

$$\begin{aligned} U_1 &= A \exp(\lambda x_2) \sin(\eta x_1) \\ U_2 &= B \exp(\lambda x_2) \cos(\eta x_1) \end{aligned} \quad 5.5.26$$

Pour assurer la convergence des solutions on doit avoir

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0 \quad 5.5.27$$

A partir des équations 5.5.16 et 5.5.26 on obtient le système d'équations linéaires homogène suivant

$$\begin{cases} A(a_1\eta^3 - a_2\eta\lambda^2 + a_3\eta) + B(a_4\eta^2\lambda - a_5\lambda^3 + a_3\lambda) = 0 \\ A(b_1\eta^2\lambda - b_2\lambda^3 + b_3\lambda) + B(b_4\eta^3 + b_5\eta\lambda^2 + b_3\lambda) = 0 \end{cases} \quad 5.5.28$$

Pour ne pas avoir de solutions triviales ( $(A,B)=0$ ), le déterminant du système linéaire 5.5.28 doit être égal à zéro. On en déduit l'équation polynomiale caractéristique pour  $\lambda$

$$A_0\lambda^6 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_3 = 0 \quad 5.5.29$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= -a_5b_2 \\ A_1 &= (-a_2b_5 + a_5b_1 + a_4b_2)\eta^2 + a_3b_2 + a_5b_3 \\ A_2 &= (-a_2b_4 + a_1b_5 - a_4b_1)\eta^4 + (a_3b_5 - a_2b_3 - a_3b_1 - a_4b_3)\eta^2 - a_3b_3 \end{aligned} \quad 5.5.30$$

$$A_3 = a_1 b_4 \eta^6 + (a_3 b_4 + a_1 b_3) \eta^4 + a_3 b_3 \eta^2$$

Les fonctions de base pour  $i=1, 2, 3$  sont de la forme

$$U_1^i = \exp(\lambda_i x_2) \sin(\eta x_1) \quad 5.5.31$$

$$U_2^i = r_i \exp(\lambda_i x_2) \cos(\eta x_1) \quad 5.5.32$$

$$p^i = p_i \exp(\lambda_i x_2) \cos(\eta x_1) \quad 5.5.33$$

avec

$$r_i = \frac{a_1 \eta^3 - a_2 \eta \lambda_i^2 + a_3 \eta}{a_4 \eta^2 \lambda_i - a_5 \lambda_i^3 + a_3 \lambda_i} \quad 5.5.34$$

$p_i$  est calculé à partir des équations 5.5.3, 5.5.10 et 5.5.11, ce qui nous donne

$$p_i = \frac{b n f}{\eta} \left[ \frac{\gamma}{\beta} (C_{11} \eta^2 - (G_s - t) \lambda_i^2 + \alpha) - 1 + \frac{\gamma}{\beta} \eta \lambda_i r_i (C_{12} + G_s + t) \right] \quad 5.5.35$$

Soient la longueur et la fréquence caractéristiques définies ci dessous

$$l_c = \rho_1 \frac{\sqrt{G_s / \rho_1}}{b} \quad ; \quad f_c = \frac{b}{\rho_1} \quad 5.5.36$$

par conséquent, on a

$$\eta_c = \frac{1}{l_c} \quad ; \quad K_c = \frac{f_c}{\eta_c} = \sqrt{\frac{G_s}{\rho_1}} \quad 5.5.37$$

On peut ainsi écrire les expressions 5.5.34 et 5.5.35 sous forme adimensionnelle

$$r_i = \frac{a_1 \eta^{*3} - a_2 \eta^{*2} \lambda_i^{*2} + a_3 \eta^{*}}{a_4 \eta^{*2} \lambda_i^{*} - a_5 \lambda_i^{*3} + a_3 \lambda_i^{*}} \quad 5.5.38$$

$$p_i = p_1 n \frac{f^{*}}{\eta} \left[ \frac{\gamma}{\beta^{*}} (C_{11} \eta^{*2} - (G_s - t) \lambda_i^{*2} + K_c^2 \alpha^{*}) - K_c^2 + \frac{\gamma}{\beta^{*}} \eta^{*} \lambda_i^{*} r_i (C_{12} + G_s + t) \right] \quad 5.5.39$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_i^{*} &= \lambda_i / \eta_c \\ \eta^{*} &= \eta / \eta_c \\ f^{*} &= f / f_c \\ \alpha^{*} &= \alpha / f_c^2 = (\rho_1 + (1 - \rho_2)) f^{*2} + \rho_1 n f^{*} \\ \beta^{*} &= \beta / f_c^2 = \rho_1 n f^{*} + (1 - n) \rho_2 f^{*2} \end{aligned} \quad 5.5.40$$

Les conditions aux limites stipulent que la surface est libre de contraintes. Nous distinguons les deux cas suivants

### V.5.3.1 Surface perméable

Pour  $x_2=0$

$$\begin{aligned} \Delta \sigma'_{22} &= 0 \\ \Delta p &= 0 \\ \Delta \sigma'_{12} &= 0 \end{aligned} \quad 5.5.41$$

La solution générale du système d'équations différentielles 5.5.23 est de la forme

$$U_1 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i U_1^i \quad ; \quad U_2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i U_2^i \quad ; \quad P = \sum_{i=1}^3 \alpha_i P^i \quad 5.5.42$$

La condition de bifurcation dérive du fait que l'on ne doit pas avoir de solution triviale en  $\alpha_i$ , ce qui nous donne

$$\det(\phi_i^j)=0 \quad 5.5.43$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_i^1 &= C_{21}\eta^* + C_{22}r_i\lambda_i^* \\ \phi_i^2 &= p_i^* \\ \phi_i^3 &= \lambda_i^* - r_i\eta^* \end{aligned} \quad i=1, 2, 3 \quad 5.5.44$$

### V.5.3.2 Surface imperméable

Pour  $x_2=0$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma'_{22} + \Delta p &= 0 \\ q_2 &= 0 \quad (\text{pas de flux normal à la surface}) \\ \Delta\sigma'_{12} &= 0 \end{aligned} \quad 5.5.45$$

Comme précédemment la condition de bifurcation est de la forme

$$\det(\phi_i^j)=0 \quad 5.5.46$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_i^1 &= C_{21}\eta^* + C_{22}r_i\lambda_i^* + p_i^* \\ \phi_i^2 &= (C_{21} + G_s - t)\lambda_i^*\eta^* - r_i^i((G_s + t)\eta^* - C_{22}\lambda_i^* + G_s f'^2) \\ \phi_i^3 &= \lambda_i^* - r_i\eta^* \end{aligned} \quad 5.5.47$$



A partir d'un état donné des paramètres d'écrouissage et pour une fréquence  $\eta^*$  donnée, il est possible de déterminer le coefficient de croissance de la perturbation  $f^*$  pour laquelle les conditions de bifurcation 5.5.43 et 5.5.46 sont vérifiées. Cette démarche nous montre, comme pour l'instabilité de volume, qu'il existe une valeur critique de l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g_{cr}^p$  pour laquelle

$$\begin{aligned} \text{si } g^p < g_{cr}^p \quad f^* < 0 \quad \text{pour tout } \eta^* \quad & (\text{régime stable}) \\ \text{si } g^p > g_{cr}^p \quad f^* > 0 \quad \text{pour tout } \eta^* \quad & (\text{régime instable}) \end{aligned}$$

Pour les paramètres des matériaux nous avons choisi les mêmes valeurs que précédemment

densité de la roche:  $2 \text{ g/cm}^3$  ; densité du fluide:  $0.7 \text{ g/cm}^3$   
porosité de la roche: 30 % ; perméabilité de la roche: 100 md  
viscosité dynamique du fluide: 1 cP

Sur la courbe 5.12, où l'on a représenté la déformation plastique critique par rapport à la fonction de dilatance, on remarque que pour une surface perméable l'instabilité de surface se produit en même temps que l'instabilité de volume. Par contre pour une surface imperméable, l'instabilité de surface se produit avant l'instabilité de volume. Par exemple pour  $\beta=0.3$  l'instabilité de surface (pour une surface imperméable) se produit pour  $g_c^p=0.0078$  alors que l'instabilité de volume se produit pour  $g_c^p=0.0084$ . On remarque également que le modèle simplifié prédit une bifurcation plus précoce que celle prédite par le modèle complet. On remarque également que lorsque la dilatance augmente les instabilités ont tendance à se produire plus tard.

Sur la figure 5.13 nous avons représenté l'évolution du coefficient de croissance  $f$  en fonction de  $\eta$  dans le cas d'une surface imperméable pour  $\beta=0.3$ , on remarque que juste avant ( $g^p < g_{cr}^p$ ) et juste après ( $g^p > g_{cr}^p$ ) la valeur critique de bifurcation  $g_{cr}^p=0.0075$  on a bien  $f < 0$  pour tout  $\eta$  en régime stable et  $f > 0$  pour tout  $\eta$  en régime instable.

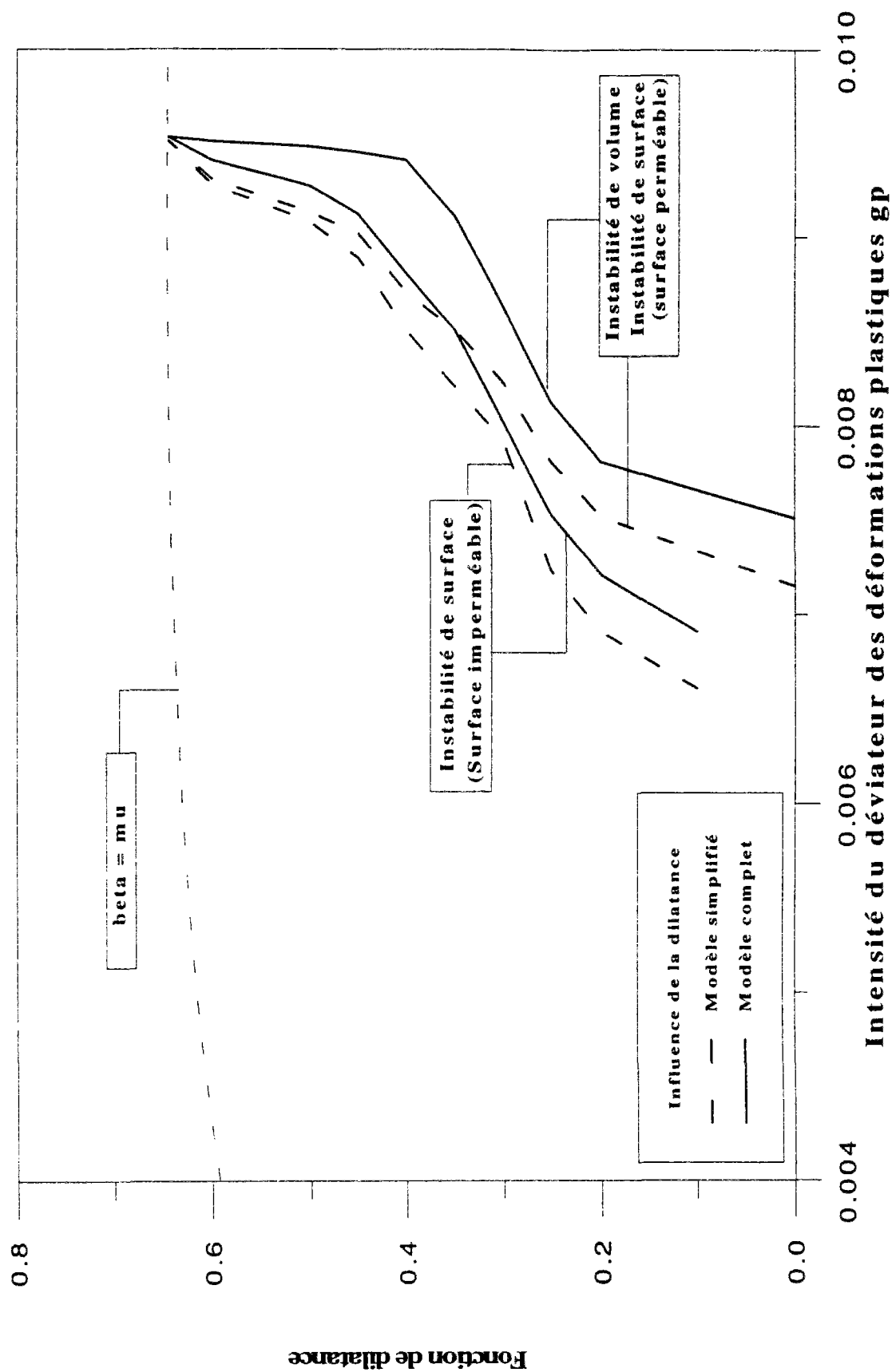


Figure 5.12: Représentation de l'évolution de la déformation plastique critique, pour les instabilités de surface et de volume, par rapport à la fonction de dilataance.

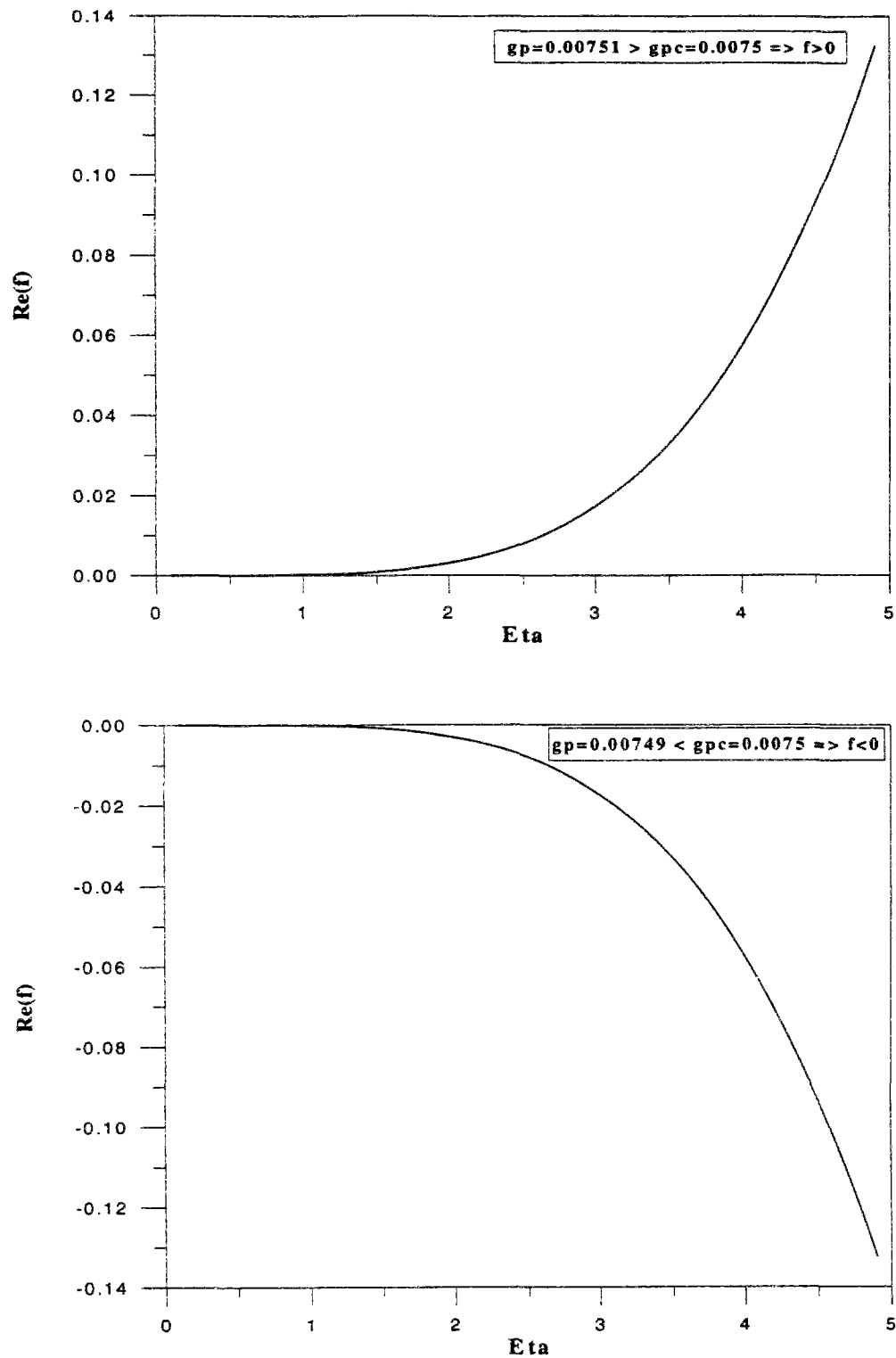


Figure 5.13: Représentation de l'évolution du coefficient de croissance  $f$  en fonction de  $\eta$  pour  $\beta=0.3$ , dans le cas d'une surface imperméable (modèle simplifié)

### V.5.4 Influence du gradient de pression et de la contrainte à l'infini sur les phénomènes d'instabilité

La phase de production de pétrole dans un puits est simulée par la diminution de la pression  $p_w$  sur la paroi du forage. Pour étudier l'influence du gradient de pression ( $\delta p = p_r - p_w$ ) sur les instabilités de volume ou de surface nous allons considérer les valeurs initiales suivantes pour le champ de contraintes:

contrainte à l'infini:  $\sigma'_\infty = 45 \text{ MPa}$  et pression du fluide:  $p_r = 15 \text{ MPa}$

Comme on le remarque sur la figure 5.14, l'intensité du déviateur des déformations plastiques (gp) au bord du forage augmente avec le gradient de pression. Pour une dilataance  $\beta = 0.3$  les instabilités de surface (pour une surface imperméable) se produisent si le gradient de pression  $\delta p \geq 7.8 \text{ MPa}$ , alors que les instabilités de volume se produisent lorsque  $\delta p \geq 10 \text{ MPa}$ . L'influence du modèle de comportement de la roche, sur les instabilités de surface ou de volume, est également importante puisque pour le modèle complet le gradient de pression doit être plus élevé que celui correspondant au modèle simplifié pour provoquer une instabilité (figure 5.14). Cela s'explique par le fait que le modèle complet prévoit un déviateur de contraintes, sur la paroi du forage, inférieur en intensité à celui prévu par le modèle simplifié (figure 5.3).

Sur la figure 5.15 nous avons représenté la variation du gradient de pression critique, pour lequel on a instabilité, par rapport à la dilataance pour les modèles simplifié et complet. On remarque que lorsque la dilataance augmente le gradient de pression critique doit être plus élevé pour provoquer une instabilité (instabilité de surface imperméable), cela prouve que plus le matériau est dilatat plus il est stable. On remarque également que pour une même valeur de la dilataance, le gradient de pression critique provoquant une instabilité est plus élevé pour le modèle de comportement complet que pour le modèle simplifié.

Nous nous sommes également intéressés à l'influence de la contrainte à l'infini (donc de la profondeur du forage) sur les conditions de bifurcation. La figure 5.16 représente la variation de l'intensité du déviateur des déformations plastiques critique (correspondant à la bifurcation

en instabilité de surface imperméable) en fonction de la profondeur du puits, pour les modèles complet et simplifié. On remarque que plus le forage est profond plus la bifurcation se produit tôt. On remarque également que le modèle simplifié prédit des instabilités plus précoces que celles prédites par le modèle complet, cela est dû au fait que le modèle complet prédit un déviateur des contraintes à la paroi du forage plus petit que celui prédit par le modèle simplifié.

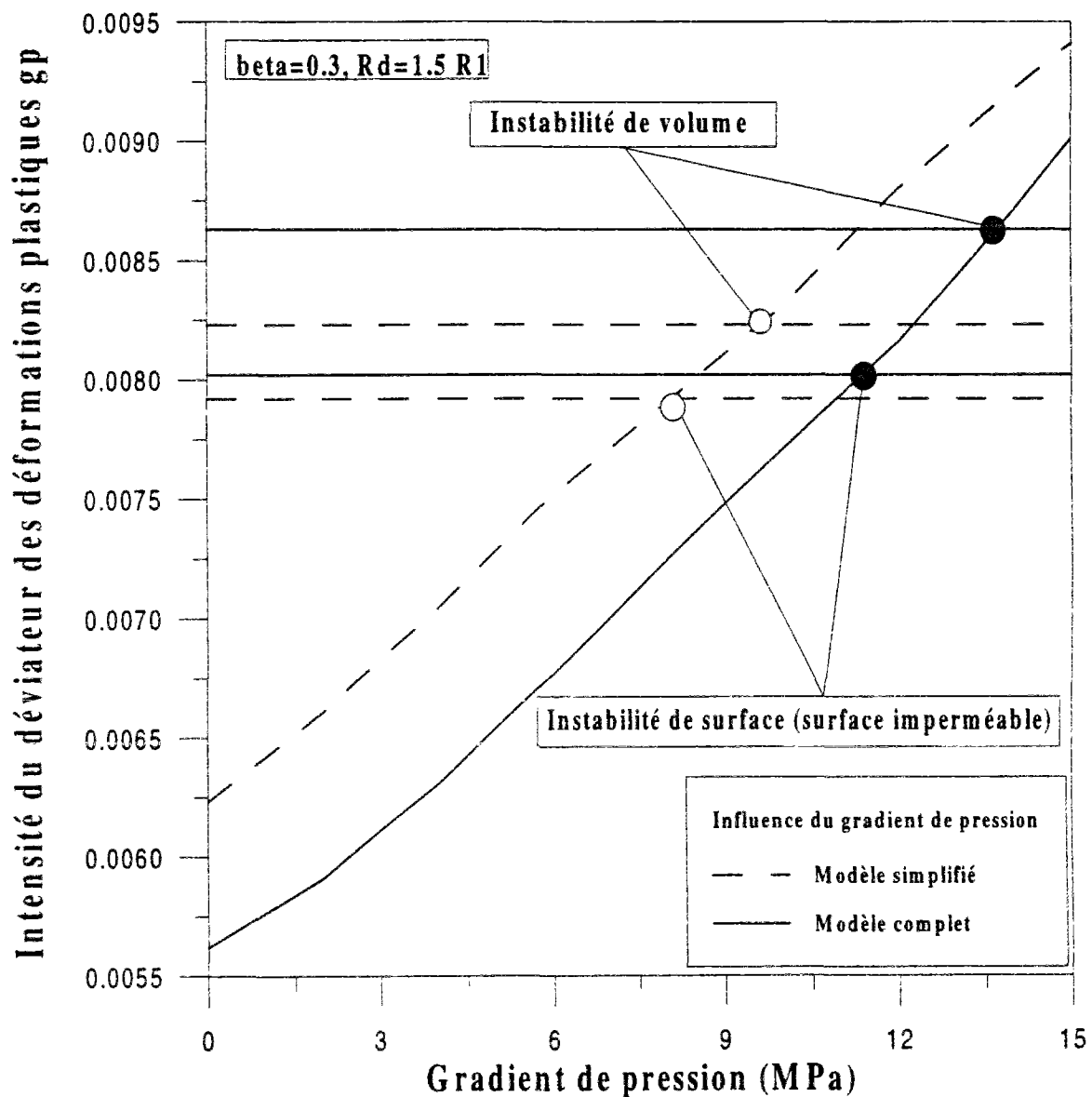


Figure 5.14: Représentation de l'intensité du déviateur des déformations plastiques ( $g^p$ ) au bord du forage par rapport au gradient de pression.

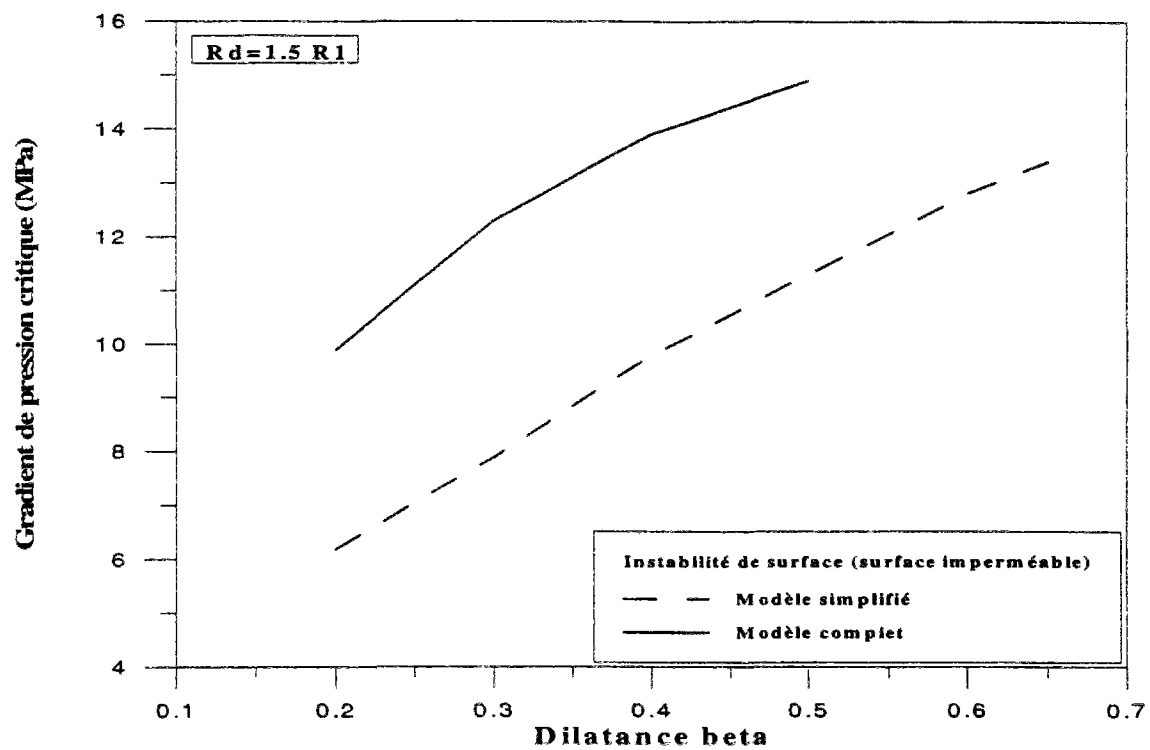


Figure 5.15: Représentation de la variation du gradient de pression critique par rapport à la dilata

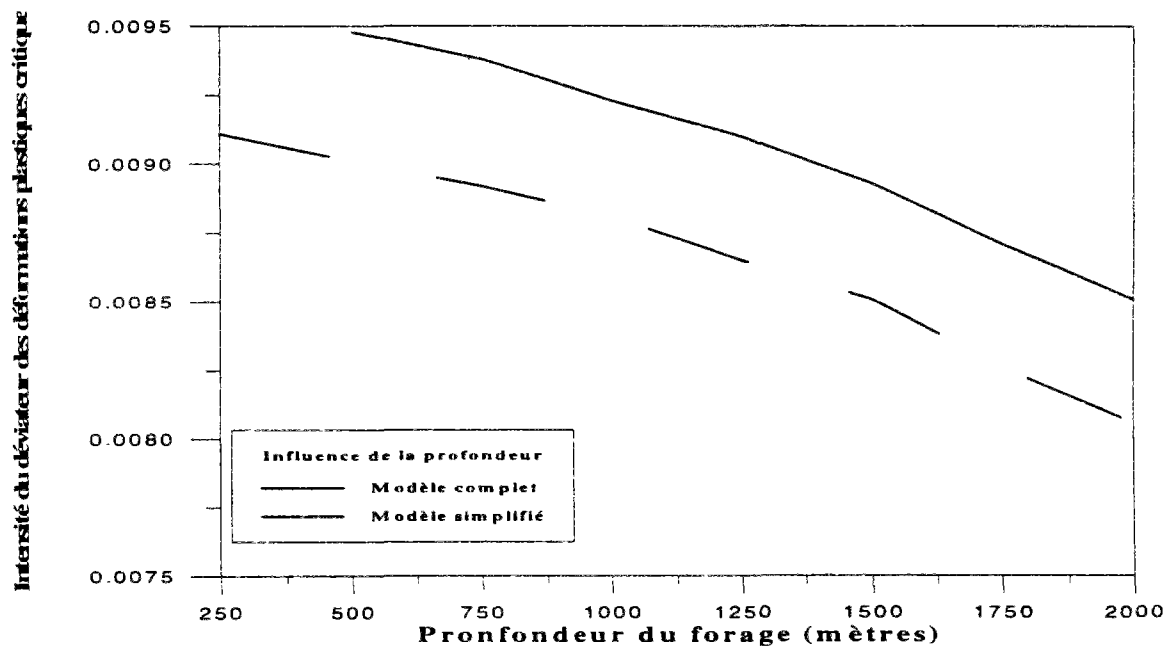


Figure 5.16: Variation de l'intensité du déviateur des déformations plastiques critique ( $g_{Cr}^p$ ) en fonction de la profondeur du puits, et influence du modèle de comportement (instabilité de surface,  $R_d=1.5 R_1$  et gradient de pression = 15 MPa))

## V.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé le phénomène de production de sable dû aux instabilités mécaniques. Nous avons présenté une théorie des milieux continus granulaires biphasiques.

Des résultats obtenus dans ce chapitre, nous pouvons retenir que, le modèle de comportement (élastique, élastoplastique ou hyperélastoplastique) choisi pour la roche (grès rouge de Wildmoor) a de l'influence sur les contraintes agissant au bord du forage en phase de creusement. Nous avons également remarqué que pour un forage en phase de production (gradient de pression non nul), plus la valeur du rayon de drainage est petite plus le déviateur des contraintes (au bord du forage) est grand, c'est donc à l'ouverture du puits que le risque de rupture et de production de sable est le plus grand.

Nous avons étudié ce phénomène de rupture en utilisant la théorie des bifurcations. Nous avons montré que les différents modes de bifurcation (Instabilité de volume: formation de bandes de cisaillement ou Instabilité de surface: flambement) dépendent essentiellement des conditions aux limites (surface perméable ou imperméable), de la dilatance, du gradient de pression, de la profondeur du forage et du modèle de comportement choisi pour la roche. Par contre ces mêmes phénomènes de bifurcation sont indépendants de la porosité ou de la perméabilité de la roche.

Par ailleurs nous avons obtenu que le modèle de comportement simplifié est plus conservatif que le modèle complet puisque ce dernier garantit la stabilité pour des valeurs plus élevées du gradient de pression appliqué à la paroi.

## Conclusion et perspectives

L'étude présentée dans ce mémoire a porté sur la modélisation du comportement du grès rouge de Wildmoor. Ses propriétés élastiques ont été étudiées dans le cadre d'un modèle hyperélastique non-linéaire avec endommagement isotrope tenant compte de l'influence de l'état des contraintes (durcissement) et de l'intensité du déviateur de déformation plastique (endommagement), sur les paramètres élastiques. Le comportement plastique du grès de Wildmoor, quant à lui, est développé à partir du critère de Mohr-Coulomb et du potentiel de Drucker-Prager non linéaires, tenant compte de la dépendance en pression des paramètres plastiques (angle de frottement, angle de dilatance) de la roche, du caractère écrouissable et radoucissant du matériau, de la phase contractante/dilatante du comportement volumique. Cette dépendance en pression est mise en évidence lors de l'étalonnage de notre modèle de comportement sur les données expérimentales (essais uniaxiaux, triaxiaux en compression et extension).

Nous avons par la suite présenté une caractérisation du comportement mécanique de base du matériau sous sollicitations triaxiales et uniaxiales cycliques (compression et extension) du grès rouge de Wildmoor. Les réponses obtenues dans les essais triaxiaux montrent une non linéarité précoce de la déformation latérale que l'on peut attribuer à un développement orienté des microfissures. Afin de mettre en évidence l'endommagement du grès rouge de Wildmoor, les essais sous compression uniaxiale et triaxiale ont été effectués avec cycles de chargement-déchargement. L'approche adoptée pour caractériser l'endommagement repose sur la mesure des paramètres élastiques. Les résultats obtenus montrent que l'endommagement axial reste faible tandis que l'endommagement latéral progresse significativement notamment au début du chargement.



La simulation des courbes expérimentales d'efforts-déformations à partir du modèle hyperélastique avec endommagement et critère de plasticité non-linéaire (modèle complet) a donné des résultats satisfaisants sur toute la gamme des pressions de confinement étudiée. La simulation des courbes efforts-déformations à partir du modèle simplifié (élasticité linéaire et critère de plasticité linéaire) nous a donné des bons résultats pour les essais à pression de confinement nulle ou peu élevée. Nous avons également remarqué que la saturation du grès de Wildmoor au pétrole n'affecte pas ses caractéristiques élasto-plastiques.

Nous avons également montré que la prédiction du point de localisation des déformations en bandes de cisaillement dépend largement de la loi de comportement considérée. Le modèle complet non-coaxial donne de bonnes prédictions du point d'initiation de la formation des bandes de cisaillement et de leur orientation. Le modèle simplifié, là encore, donne des prédictions satisfaisantes à faible pression de confinement. A côté du mode de bifurcation localisé, nous avons étudié la possibilité d'apparition d'un mode de bifurcation diffus conduisant à la mise en tonneau de l'échantillon. Ce mode de bifurcation génère des tractions dans l'échantillon qui peuvent conduire à l'activation et à la propagation instable des microfissures préexistantes dans la roche. De l'étude de la bifurcation diffuse nous retenons que la stabilité de l'échantillon dépend largement de son élancement. Enfin nous nous sommes aperçus que pour les essais confinés le mode de bifurcation dominant est la localisation en bandes de cisaillement alors que pour les essais non confinés le mode dominant est la bifurcation diffuse. La pression de confinement est donc un paramètre qui gouverne non seulement le mode de rupture du grès, mais également la résistance du matériau et l'orientation du plan de rupture.

Afin de comprendre les phénomènes de production de sable dus aux instabilités mécaniques, nous avons utilisé une théorie des milieux continus granulaires biphasiques. Le phénomène de production de sable est ici associé à la rupture par décohesion du grès. A partir des résultats obtenus, nous pouvons retenir que, le modèle de comportement (élastique linéaire, élastoplastique ou complet) choisi pour la roche (grès rouge de Wildmoor) a de l'influence sur les contraintes agissant au bord du forage en phase de creusement. Nous avons également remarqué que pour un forage en phase de production (gradient de pression non nul), plus la valeur du rayon de drainage est petite plus le déviateur des contraintes (au bord du forage) est grand, c'est donc à l'ouverture du puits que le risque de rupture et de production de sable est le

plus grand. Ce phénomène de rupture nous l'avons étudié en utilisant la théorie des bifurcations, nous nous sommes aperçus que les différents modes de bifurcation, instabilité de volume (formation de bandes de cisaillement) ou instabilité de surface (flambement), dépendent essentiellement des conditions aux limites (surface perméable ou imperméable), de la dilatance (plus la roche se dilate plus elle est stable), du gradient de pression (lorsque le gradient de pression augmente les instabilités se produisent plus tôt), de la profondeur du forage (lorsque la profondeur augmente les instabilités se produisent plus tôt) et du modèle de comportement choisi pour la roche (le modèle simplifié est plus conservatif que le modèle complet). Par contre ces mêmes phénomènes de bifurcation sont indépendants de la porosité ou de la perméabilité de la roche.

Dans cette étude nous nous sommes intéressés à l'initiation des instabilités. Pour en étudier l'évolution, une approche par éléments finis est nécessaire comme l'a proposée Papanastasiou [1990]. Ceci nécessite de bien décrire le comportement de la roche dans la phase radoucissante. La modélisation du comportement post-pic des roches semble être une perspective intéressante car ce comportement est mal connu jusqu'à présent que ce soit des expérimentateurs ou des théoriciens.

Il serait également intéressant de prendre en compte les effets d'échelle lors de l'analyse de stabilité des forages et notamment pour étudier l'influence du rayon du puits sur les phénomènes de bifurcation, comme l'ont proposé Sulem et al [1995b].

Du point de vue de la modélisation des phénomènes de production de sable dans les forages, Vardoulakis et al [1996b] ont étudié l'aspect hydro-mécanique du problème en tenant compte des effets de transport de particules par le fluide de saturation, les résultats obtenus montrent que l'érosion de la surface du forage s'accompagne d'une variation de la porosité et de la perméabilité. La production de sable change donc la structure de la matrice rocheuse et modifie ainsi ses propriétés de dilatance. Il serait donc intéressant de coupler ces études hydro-dynamiques aux études de la stabilité.

A grande profondeur, la température peut être un paramètre influant sur le comportement de la roche, un modèle thermo-hydro-mécanique serait donc approprié pour étudier la stabilité des forages à grande profondeur.



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**ABRAMOWITZ M., STEGUN A. I. (1965)**

"Handbook of mathematical functions"  
Dover Publications.

**AUBRY D. et MODARESSI A. (1991)**

"Analyse des conditions de discontinuité des déformations dans un milieu endommagé orienté"  
Compte rendu, Groupement Géomécanique des roches profondes.

**BARDET J.P. (1991)**

"Analytical solutions for the plane-strain bifurcation of compressible solids"  
J. of applied Mec. Vol. 58, pp. 651-657

**BAZANT Z. P. (1967)**

"L'instabilité d'un milieu continu et la résistance en compression"  
Bulletin Rilem, No. 35, pp. 99-112

**BEREST P., BERGUES J. et DUC N.M. (1979)**

"Comportement des roches au cours de la rupture: application à l'interprétation d'essais sur des tubes épais"  
Revue française de Géotechnique, No. 9, pp. 5-12

**BIOT M. A. (1956)**

"General solutions of the equations of elasticity and consolidation for porous materials"  
Journal of Applied Mechanics, New York.

**BUDIANSKI B. (1959)**

"A reassessment of deformation theories of plasticity"  
J. of Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 259-264

**CHABOCHE J. L. (1988a)**

"Continuum damage mechanics: Part I-General concepts"  
Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 59-64

**CHABOCHE J. L. (1988b)**

"Continuum damage mechanics: Part II-Damage growth, crack initiation and crack growth"  
Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, pp. 65-72

**CHARLEZ Ph. A. (1991)**

"Rock mechanics"  
Edition TECHNIP.

**CHAU K.T. (1992)**

"Non-normality and bifurcation in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under axisymmetric tension and compression"  
Int. J. Solids Structures, Vol. 29, pp. 801-824

**CHAU K.T. and RUDNICKI J.W. (1990)**

"Bifurcation of compressible pressure-sensitive materials in plane-strain tension and compression"  
J. Mech. Phys. Solids Vol. 38, No. 6, pp. 875-898

**CHEN W. F. and HAN D. J. (1988)**

"Plasticity for structural engineers"  
Springer-Verlag

**CORDEBOIS J. P. et SIDOROFF F. (1982)**

"Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité"  
Journal de Mécanique théorique et appliquée, No. spécial, pp. 45-60

**CORNET F. H. (1977)**

"Etude du comportement élastique et fragile des roches saturées par un liquide"  
Revue Française de Géotechnique, Vol.2., pp. 81-100

**CROUZEIX M. and MIGNOT A. L. (1989)**

"Analyse numérique des équations différentielles"  
Edition Masson.

**DEMAILLY J. P. (1991)**

"Analyse numérique et équations différentielles"  
Presses Universitaires de Grenoble.

**DESRUES J. (1984)**

"La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires"  
Thèse de Docteur-Ingenieur, USM et INP de Grenoble.

**DESRUES J. (1991)**

"Bandes de cisaillement dans les roches: Questions ouvertes, études entreprises"  
Compte rendu, Groupement Géomécanique des roches profondes.

**DESRUES J. et CHAMBON R. (1988)**

"Bifurcation par localisation de la déformation: Etude expérimentale et théorique à l'essai biaxial sur sable"  
Théorie de la bifurcation et application à la mécanique des matériaux rocheux. Compte rendu du séminaire CFMR, Elf aquitaine.

**DESRUES J., CHAMBON R., MOKNI M. and MAZEROLLE F. (1996)**

"Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography"  
Géotechnique Vol. 46, No. 3, pp. 529-546

**DESRUES J. et DUTHILLEUL B. (1984)**

"Mesure du champ de déformation d'un objet plan par la méthode stéréophotogrammique de faux relief"  
Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, Vol. 3, No. 1, pp. 79-103

**DESRUES J. et MOKNI M. (1991)**

"Tomodensitométrie et localisation dans les sables"  
X ECSMFE, Florence, Balkema eds, pp. 61-64

**DIOUTA NGAMY G. (1995)**

"Analyse numérique de la localisation dans les matériaux rocheux"  
Thèse de Doctorat présentée à l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

**DRAGON A. (1991)**

"Bifurcation en mode localisé pour un matériau endommageable et problème de l'amorçage d'une fissure"  
Compte rendu, Groupement Géomécanique des roches profondes.

**DRECSHER A. and VARDOULAKIS I. (1982)**

"Geometric softening in triaxial tests on granular material"  
Géotechnique, Vol. 32, No. 4, pp. 291-303

**DRUCKER D. C. And PRAGER W. (1952)**

"Soil mechanics and plastic analysis or limit design"  
Q. Appl. Math., Vol. 10 (2), pp. 157-165

**DUVAUT G. (1990)**

"Mécanique des milieux continus"  
Edition MASSON.

**FJAER E., HOLT R. M., HORSRUD P., RAAEN A. M. and RISNES R. (1992)**

"Petroleum related rock mechanics"  
ELSEVIER Publications.

**GOODMAN R. E. (1989)**

"Rock mechanics"  
Edition John WILEY & Sons.

**GUENOT A. (1987)**

"Contraintes et ruptures autour des forages pétroliers"  
6th ISRM CONGR-MONTREAL.

**GUENOT A. (1988)**

"Bifurcation et mécanique des roches"  
Compte rendu pour Elf aquitaine.

**GUENOT A. (1989)**

"Borehole breakouts and stress field"  
Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 26, No. 3/4, pp. 185-195

**HAIED A. (1995)**

"Etude expérimentale de la rupture en mode localisé dans un grès"  
Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille.

**HALPHEN B. et SALENÇON J. (1987)**

"Elasto-plasticité"  
Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

**HARR E. M. (1981)**

"Mécanique des milieux formés de particules"  
Presses Polytechniques Romandes.

**JAEGER J. C., COOK N. G. W. (1979)**

"Fundamentals of rock mechanics"  
Edition CHAPMAN & HALL.

**KONDO D., HENRY J.Y. et HENRY J.P. (1988)**

"Mécanique linéaire de la rupture appliquée à l'analyse de l'écaillage autour d'ouvrages souterrains"  
Théorie de la bifurcation et application à la mécanique des matériaux rocheux. Compte rendu du séminaire CFMR, Elf aquitaine.

**LADE P. V. and NELSON B. (1987)**

"Modelling of the elastic behavior of granular materials"  
Int. J. Anal. Methods in Geomechanics, Vol. 11, pp. 521-554

**LAMA R.D. and VUTUKURI V.S. (1978)**

"Mechanical properties of rocks"

Series on Rock and Soil Mechanics, Vol II and III, Transtech Publications.

**LEMAITRE J. (1990)**

"A course on damage mechanics"

Springer Verlag, Berlin.

**LEMAITRE J. et CHABOCHE J. L. (1978)**

"Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement"

Journal de Mécanique appliquée, Vol. 2, No. 3, pp. 317-365

**LEMAITRE J. and DUFAILLY J. (1987)**

"Damage measurments"

Engineering Fracture Mechanics, Vol. 28, No. 5/6, pp. 643-661

**LEROY Y. And TRIANTAFYLLIDIS N. (1996)**

"Folding and localized faulting in a frictional, cohesive overburden resting over a viscous substratum"

Submitted to Aspects of Tectonic Faulting, Eds. F. K. Lehner, G.Riedmuller and E. Wallbrecher

Series: Lecture Notes in Earth Sciences, Springer-Verlag, Heidelberg.

**LORET B. (1985)**

"Short communication on the choice of elastic parameters for sand"

Int. J. for Num. and Anal. methods in Geomech., Vol. 9, pp. 285-292

**LORET B. et HARIRECHE O. (1991)**

"Localisation des déformations dans les milieux poreux"

Compte rendu, Groupement Géomécanique des roches profondes.

**MARLE C. (1967)**

"Ecoulements monophasiques en milieu poreux"

Revue de l'Institut Français du Pétrole, pp. 1471-1509

**MAURY V.M. (1993)**

"An overview of tunnel, underground excavation and boreholes collapse mechanisms"

Comprehensive Rock Engineering, Ed. Hudson J. A., Vol. 4, pp.369-409

**MAURY V.M. and SAUZAY J.M. (1988)**

"Borehole instability: Rock mechanics approach and results"

Elf aquitaine, Members SPE.

**MOLENKAMP F. (1985)**

"Comparison of frictionnal material models with respect to shear band initiation"

Géotechnique Vol. 35, No. 2, pp. 127-143



**MOLENKAMP F. (1988)**

"A simple model for isotropic non-linear elasticity of frictional materials"  
Int. J. Num. Anal. Methods in Geomechanics, Vol. 12, pp. 467-476

**MORITA N., BLACK A. D. and FUH G.-F. (1996)**

"Borehole breakdown pressure with drilling fluids-I. Empirical results"  
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 33, No. 1, pp. 39-51

**MROZ Z. (1963)**

"Non-associate flow laws in plasticity"  
J. de Mécanique, Vol. 2, pp. 21-42

**MÜHLHAUS H. B. and VARDOULAKIS I. (1987)**

"The thickness of shear bands in granular materials"  
Geotechnique, Vol. 7, No. 3, pp. 271-283

**NGUYEN MINH D. et SCHMITT N. (1988)**

"Contraction du tube épais circulaire: Remarques sur l'influence d'une non linéarité élastique"  
Revue française de Géotech., No. 42, pp. 35-46

**OGDEN R. W. (1984)**

"Non linear elastic deformations"  
Edition ELLIS HORWOOD limited.

**ORD A., VARDOULAKIS I. and KAJEWSKI R. (1991)**

"Shear band formation in gosford sandstone"  
Int. J. Rock Mech. Min.Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 28, No. 5, pp. 397-409

**PAPAMICHOS E. (1992)**

"Surface instabilities and fracture: Theorie and experiment"  
A Phd thesis submitted to the faculty of the graduate school of the University of Minnesota

**PAPAMICHOS E. and VARDOULAKIS I. (1995)**

"Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model"  
Géotechnique 45, No. 4, pp. 649-661

**PAPAMICHOS E., TRONVOLL J., SKAERSTEIN A., UNANDER T. E., VARDOULAKIS I. and SULEM J. (1996a)**

"The effect of plane-strain and isotropic loading in hollow-cylinder strength"  
Eurock 96, ISRM Int. Symp. on Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering, Torino. Italy, Editor BARLA G., pp.197-204

**PAPAMICHOS E., TRONVOLL J., SKAERSTEIN A., UNANDER T. E., LABUZ J. F., VARDOULAKIS I. and SULEM J. (1996b)**

"Constitutive testing of a weak sandstone"

Paper submitted for publication to the *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*.

**PAPAMICHOS E., VARDOULAKIS I. and MUHLHAUS H. B. (1995)**

"Buckling of layered elastic media: A Cosserat continuum approach and its validation"

Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 14, pp. 473-498

**PAPANASTASIOU P. (1990)**

"Numerical analysis of localization phenomena with application in deep boreholes"

A thesis submitted to the faculty of the graduate school of the University of Minnesota

**PAPANASTASIOU P. and VARDOULAKIS I. (1989)**

"Bifurcation analysis of deep boreholes: II. Scale effect"

Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 13, pp. 183-198

**PAPANASTASIOU P. and VARDOULAKIS I. (1992)**

"Numerical treatment of progressive localization in relation to borehole stability"

Int. J. for numerical and analytical methods in geomech., Vol. 16, pp. 389-424

**PELLEGRINO A. (1995a)**

"Comportement fragile des roches: dégradation des propriétés élastiques et anisotropie induite par les contraintes"

Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

**PELLEGRINO A. (1995b)**

"The effect of slenderness and lubrication on the uniaxial behaviour of a soft limestone"

Paper submitted for publication to the *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*

**PELLEGRINO A., SULEM J. and BARLA J (1996)**

"Effects of induced anisotropy on the strength and deformation behaviour of two sedimentary rocks"

Eurock 96, ISRM Int. Symp. on Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering, Torino, Italy, Editor BARLA G., pp.189-196

**POUGH F. H. (1972)**

"Guide des roches et minéraux"

Editions DELACHAUX/NIESTLE.

**RANIECKI B. and BRUHNS O. T. (1981)**

"Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain"

J. Mech. Phys. Solids Vol 29, No. 2, pp. 153-172

**RICE J. R. (1975)**

"On the stability of dilatant hardening for saturated rock masses"  
Journal of Geophysical Research, Vol. 80, No. 11, pp. 1531-1536

**RICE J. R. (1976)**

"Theoretical and applied mechanics"  
Edition KOITER W. T., North Holland, Amsterdam.

**RICE J. R. and RUDNICKI J. W. (1980)**

"A note on some features of the theory of localisation of deformation"  
Int. J. Solids Struct., Vol. 16, pp. 597-605

**ROSCOE K. H. (1970)**

"The influence of strains in soil mechanics"  
Géotechnique, Vol. 20, pp. 129-170

**RUDNICKI J. W. and RICE J. R. (1975)**

"Conditions for the localisation of deformation in pressure-sensitive dilatant materials"  
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23, pp. 371-394

**SALENÇON J. (1989)**

"Mécanique des milieux continus: Concepts généraux"  
Tomes I et II, Editions de l'Ecole Polytechnique.

**SANTARELLI F. J. (1987)**

"Theoretical and experimental investigation of the stability of the axisymmetric wellbore"  
Ph.D. Thesis, University of London, London 1987, 472 pp..

**SANTARELLI F. J. (1988)**

"Etude expérimentale de la bifurcation dans les roches"  
Théorie de la bifurcation et application à la mécanique des matériaux rocheux. Compte rendu du séminaire CFMR, Elf aquitaine.

**SANTARELLI F.J. and BROWN E.T. (1989)**

"Failure of three sedimentary rocks in triaxial and hollow cylinder compression tests"  
Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 26, No. 5, pp. 401-413

**SANTARELLI F.J., BROWN E.T. and MAURY V. (1986)**

"Analysis of borehole stresses using pressure dependent, linear elasticity"  
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., Vol. 23, pp. 445-449

**STOREN S., RICE J. R. (1975)**

"Localized necking in thin sheets"  
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23, pp. 421-441

**SULEM J. (1987)**

"Analyse des instabilités de paroi des forages profonds par la théorie des bifurcations"  
Rapport de recherche pour la SNEAP.

**SULEM J. (1993)**

"Phénomènes de bifurcation en mécanique des roches"  
Habilitation à diriger des recherches présentée à l'Université Paris 7.

**SULEM J., ORD A. and VARDOULAKIS I. (1991)**

"Shear band formation in sandstone"  
Seventh Int. Conference on Computer methods and advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter (eds).

**SULEM J. and VARDOULAKIS I. (1988)**

"A new approach to borehole stability based on bifurcation theory"  
Research Report to Société Nationale Elf Aquitaine.

**SULEM J. and VARDOULAKIS I. (1989)**

"Sand production in boreholes"  
Research Report to Société Nationale Elf Aquitaine.

**SULEM J. and VARDOULAKIS I. (1990)**

"Bifurcation analysis of the triaxial test on rock specimens"  
Acta mechanica, Vol. 83, pp. 195-212

**SULEM J. and VARDOULAKIS I. (1993)**

"Analysis of experimental data from triaxial compression tests performed on Wildmoor sandstone during phase I"  
Progress report for IKU SINTEF GROUP.

**SULEM J., VARDOULAKIS I. and OULAHNA A. (1995a)**

"Investigation of cavity failures for sand production prediction -Phase II"  
Final report for IKU SINTEF GROUP.

**SULEM J., VARDOULAKIS I. and PAPAMICHOS E. (1993)**

"Prediction of shear failure in sandstone"  
Int. Symp. hard soils/soft rocks, Athens.

**SULEM J., VARDOULAKIS I. and PAPAMICHOS E. (1995b)**

"Microstructure and scale effect in granular rocks"  
Continuum Models for Materials with Microstructure. Edited by H.-B. Mühlhaus, John Wiley & Sons Ltd., pp. 201-237

**TAYLOR D. (1948)**

"Fundamentals of soil mechanics"  
Edition John Wiley.

**TERZAGHI K. V. (1936)**

"The shearing resistance of saturated soils"  
Proc. 1st. ICSMFE, Cambridge 1, pp. 54-56

**TILLARD D. (1992)**

"Etude de la rupture dans les géomatériaux cohésifs. Application à la marne de Beaucaire"  
Thèse de Docteur-Ingenieur, UJF, Grenoble.

**TORRENTI J. M., DESRUES J., ACKER P. and BOULAY C. (1988)**

"Application of stereophotogrammetry to the strain localisation in concrete in compression"  
France-US workshop on strain localisation and size effect due to cracking and damage, Ed. Mazard J. And Bazant Z. P., pp.30-41

**TRONVOLL J. (1993)**

"Investigation of cavity failures for sand production prediction"  
A Ph.D. Thesis submitted to the University of Trondheim.

**TRONVOLL J., FJAER E. (1994)**

"Experimental study of sand production from perforation cavities"  
Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 31, No. 5, pp. 393-410

**TRONVOLL J., PAPAMICHOS E. and KESSLER N. (1993)**

"Perforation cavity stability: Investigation of failure mechanisms"  
Geotechnical Engineering of hard soils-soft rocks, Anagnopoulos et al(eds), pp. 1687-1693

**VARDOULAKIS I. (1974)**

"Berchnungsverfahren für Erdkörper mit plastischer"  
Ver- und Entfestigung: Entstehung und Ausbreitung von Scherfugen. DFG  
Report GU 103/16.

**VARDOULAKIS I. (1979)**

"Bifurcation analysis of the triaxial test on sand sample"  
Acta Mechanica, Vol. 32, pp. 35-54

**VARDOULAKIS I. (1981)**

"Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sand samples"  
Int. J. Solids Structures, Vol. 17, No. 11, pp. 1085-1101

**VARDOULAKIS I. (1983a)**

"Rigid granular plasticity model and bifurcation in the triaxial test"  
Acta Mechanica, Vol. 49, pp. 57-79

**VARDOULAKIS I. (1983b)**

"Rock bursting as a surface instability phenomenon"

Int. J. Rock Mech. Sci. And Geomech. Abstr., Vol. 21, pp. 137-144

**VARDOULAKIS I. (1985)**

"Stability and bifurcation of undrained simple shear on water-saturated granular soils"

Int. J. Anal. Meth. Geomech., Vol. 9, pp. 339-414

**VARDOULAKIS I. (1989)**

"Shear banding and liquefaction on the basis of a Cosserat continuum theory"

Ing. Archiv., No. 59, pp. 106-113

**VARDOULAKIS I. (1995)**

"Anisotropic properties and shear banding of red Wildmoor sandstone"

Progress Report for IKU-Sintef Group.

**VARDOULAKIS I. and GRAF B. (1985)**

"Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments"

Géotechnique 35, No. 3, pp. 299-317

**VARDOULAKIS I. and SULEM J. (1993)**

"Application of bifurcation theory to rock mechanics problems"

Comprehensive Rock Mechanics, Vol. 1, Chap. 24, Ed. J. Hudson, Pergamon Press.

**VARDOULAKIS I. and SULEM J. (1995)**

"Bifurcation analysis in geomechanics"

BLACKIE ACADEMIC & PROFESSIONAL, an imprint of CHAPMAN & HALL.

**VARDOULAKIS I., SULEM J. and GUENOT A. (1988)**

"Borehole instabilities as bifurcation phenomena"

Int. J. Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 25, No. 3, pp. 159-170

**VARDOULAKIS I., SULEM J., OULAHNA A., PAPAMICHOS E., UNANDER T. E. and TRONVOLL J. (1996a)**

"Elasto-plastic behaviour of a weak sandstone"

Eurock 96, ISRM Int. Symp. on Prediction and Performance in Rock Mechanics and Rock Engineering, Torino, Italy, Editor BARLA G., pp. 189-196

**VARDOULAKIS I., STAVROPOULOU M. and PAPANASTASIOU P. (1996b)**

"Hydro-mechanical aspects of the sand production problem"

Transport in Porous Media, Kluwer Academic Publishers, Vol. 22, pp. 225-244

**VARDOULAKIS I., SULEM J. and PAPAMICHOS E. (1993)**

"Non-linear elastic-plastic law for Wildmoor sandstone simulation of plane strain deformations"

Investigation of cavity failures for sand production-Phase II, Progress Report for IKU-Norway.

**VERRUIJT A. (1969)**

"Elastic storage in aquifers, in: Flow through porous media"

Edition De Wiest R.J.M., Academic Press, New York, pp. 331-376

**WAWERSIK W.R., RUDNICKI J.W. and OLSSON W.A. (1990)**

"Localisation of deformation in brittle rock : Theoretical and laboratory investigations"

Published in Proc. of Int.Conference on micromechanics of failure of quasi brittle materials.

**YOUNG N.J.B. (1976)**

"Bifurcation phenomena in the plane compression test"

J. Mech. Phy. Solids, Vol. 24, pp.77-91, 1976.

**ZHENG Z. and COOK N.G.N. (1989)**

"Analysis of borehole breakouts"

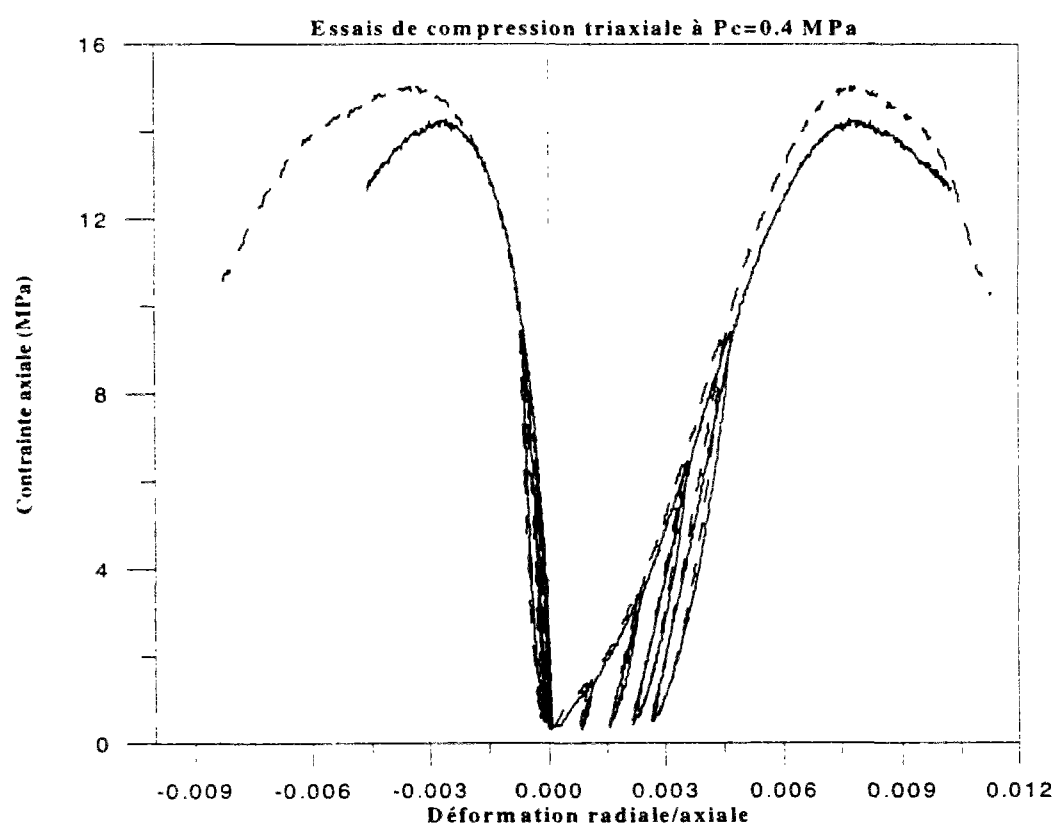
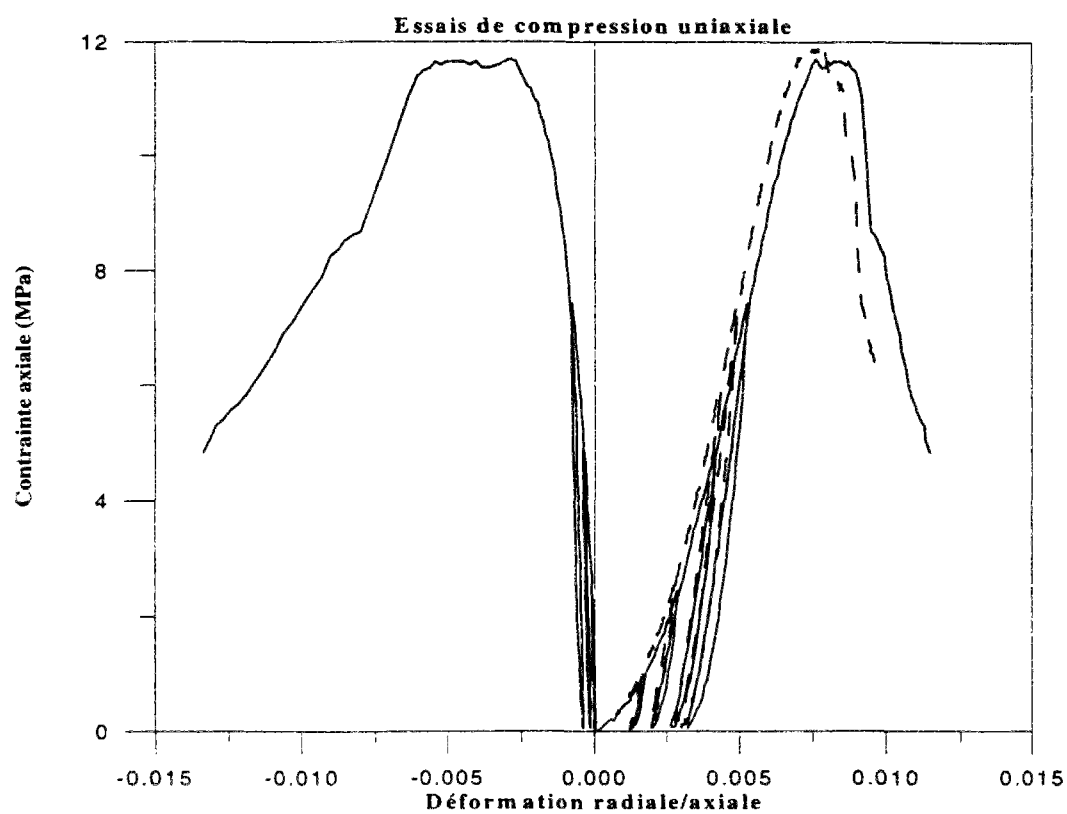
J Geophys. Res., Vol. 94, No. B6, pp. 7171-7182

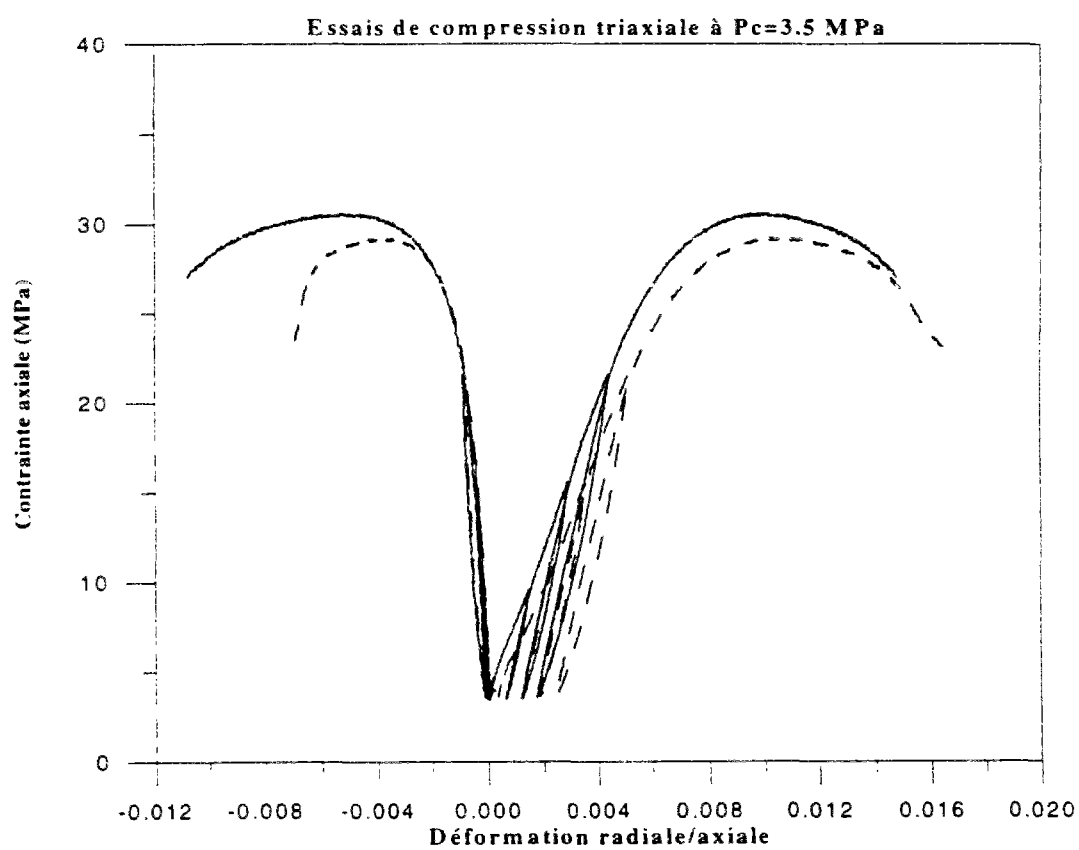
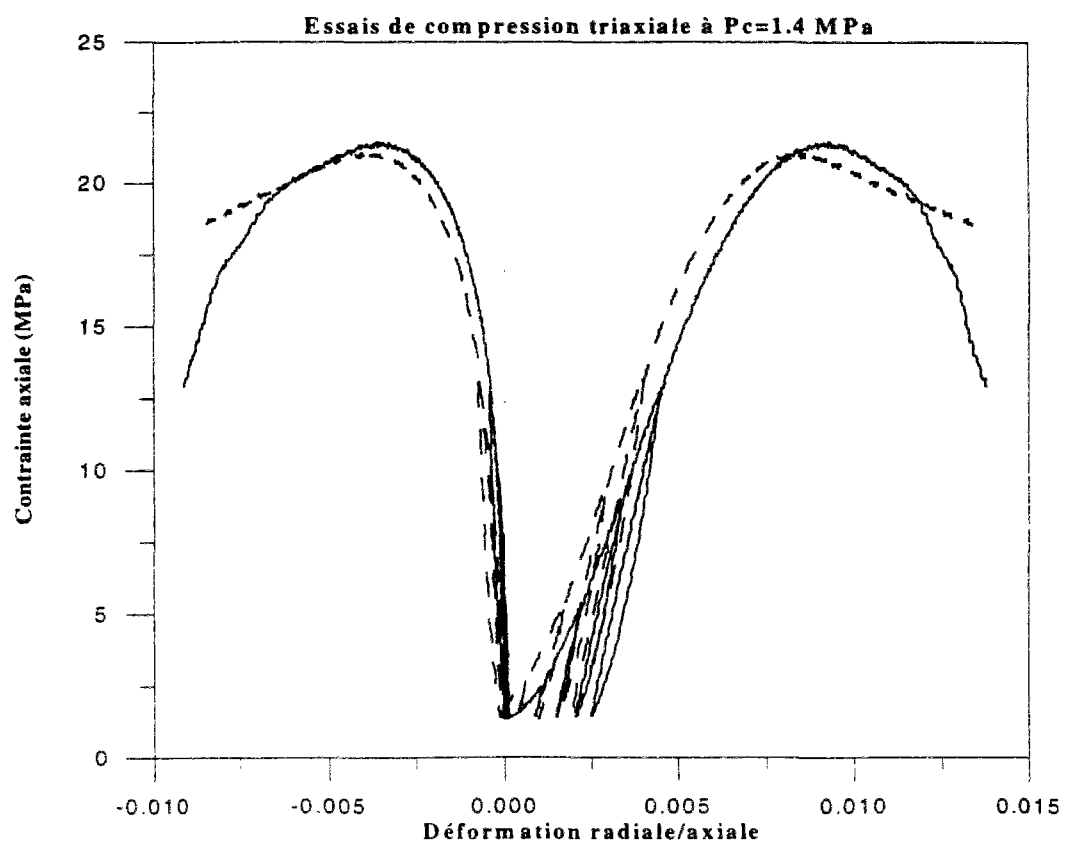
# **Annexe A**

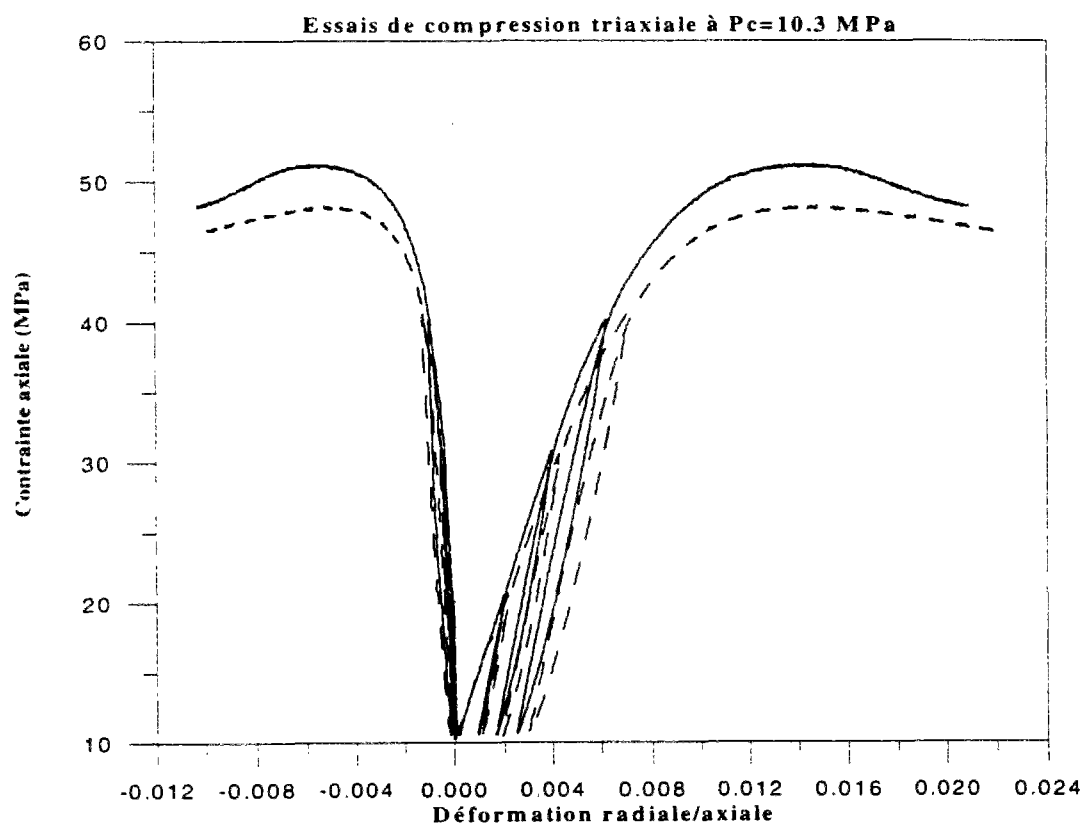
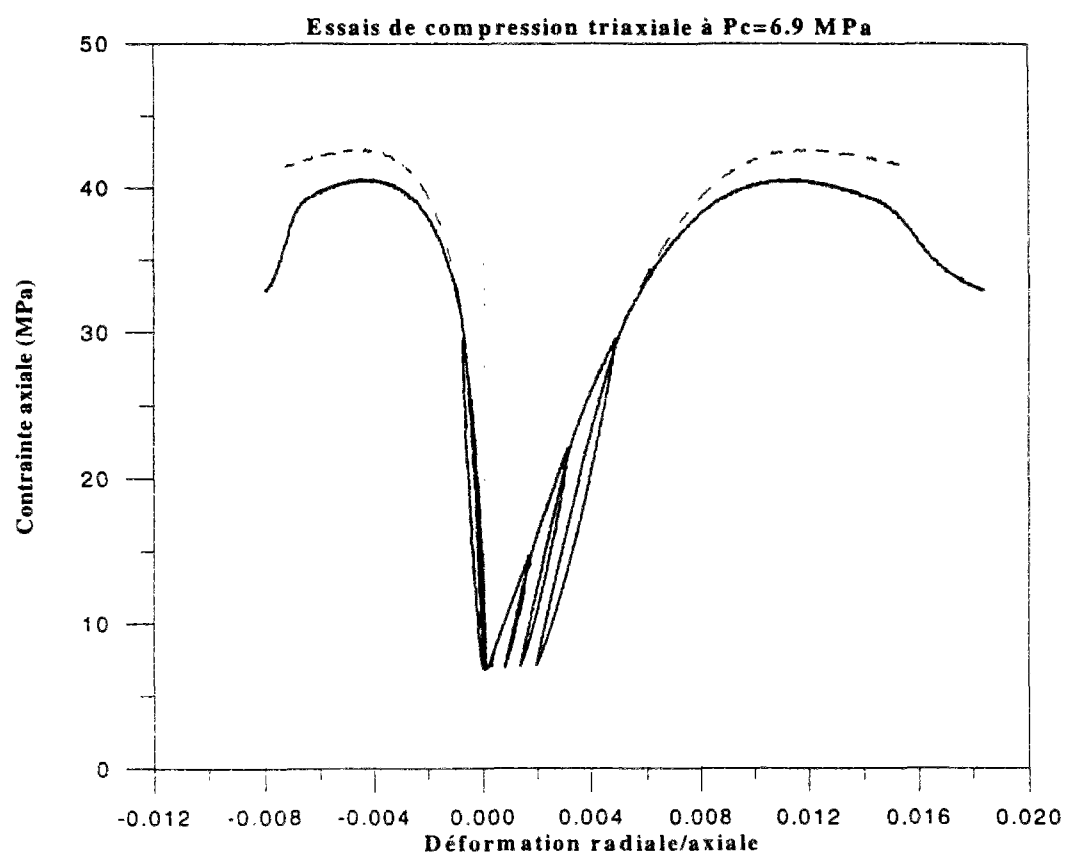
Pour chaque niveau de pression de confinement (0, 0.4, 1.4, 3.5, 6.9, 10.3 Mpa), deux essais de compression triaxiale ont été réalisés afin de tester la reproductibilité des résultats. Les courbes efforts-déformations présentées dans cette annexe plaident en faveur d'une assez bonne reproductibilité des essais.













## **Annexe B**

Tableau de données concernant chaque cycle de chaque essai ,de compression triaxiale et uniaxiale, a différentes pressions de confinement.



Essai	$\sigma_c$ MPa	cycle	T MPa	P MPa	$g^p$	$\sigma_o$ MPa	$E_s$ MPa	$\nu$	$G_s$ MPa
101	0	1	0.57	-0.33	0.00E+0	0.98787	920	0.07	270.59
101	0	2	1.41	-0.81	7.217E-4	2.4395	2400	0.09	1100.9
101	0	3	2.88	-1.66	1.576E-3	4.9865	3100	0.16	1336.2
101	0	4	4.35	-2.51	2.581E-3	7.5334	3400	0.20	1416.7
118	0.4	1	0.55	-0.7	0.00E+0	1.2954	3250	0.09	1490.8
118	0.4	2	1.7	-1.4	8.314E-4	3.2624	3560	0.14	1561.4
118	0.4	3	3.5	-2.4	1.409E-3	6.3301	4030	0.19	1693.3
118	0.4	4	5.2	-3.4	1.871E-3	9.2824	4250	0.24	1713.7
119	0.4	1	0.55	-0.73	0.000E+0	1.3278	4030	0.11	1815.3
119	0.4	2	1.7	-1.3	9.007E-4	3.1794	4100	0.15	1782.6
119	0.4	3	3.5	-2.4	1.524E-3	6.3301	4540	0.20	1891.7
119	0.4	4	5.2	-3.4	1.848E-3	9.2824	4780	0.26	1896.8
103	1.4	1	0.59	-1.78	0.00E+0	2.6623	4780	0.11	2153.2
103	1.4	2	2.19	-2.68	6.928E-4	5.0442	5180	0.11	2333.3
103	1.4	3	4.36	-3.95	1.363E-3	8.6819	5380	0.17	2299.1
103	1.4	4	6.55	-5.15	1.848E-3	12.366	5420	0.22	2221.3
117	1.4	1	0.8	-1.85	0.000E+0	2.8765	4660	0.20	1941.7
117	1.4	2	2.31	-2.75	6.928E-4	5.2403	5120	0.18	2169.5
117	1.4	3	4.64	-4.11	1.224E-3	9.1556	5390	0.22	2209
117	1.4	4	6.93	-5.4	1.697E-3	13.043	5400	0.27	2126
112	3.5	1	0.69	-3.9	0.00E+0	5.5884	6440	0.17	2752.1
112	3.5	2	3.54	-5.52	9.238E-4	9.4456	6870	0.17	2935.9
112	3.5	3	6.97	-7.5	1.617E-3	15.002	6870	0.21	2838.8
112	3.5	4	10.4	-9.5	2.194E-3	20.78	6460	0.25	2584
106	3.5	1	0.69	-3.9	0.000E+0	5.5884	6760	0.07	3158.9
106	3.5	2	3.53	-5.52	6.928E-4	9.4599	7000	0.17	2991.5
106	3.5	3	7	-7.5	1.328E-3	15.034	6900	0.21	2851.2
106	3.5	4	10.4	-9.5	2.021E-3	20.78	6590	0.27	2594.5
114	6.9	1	0.72	-7.3	0.00E+0	10.331	7350	0.00	3675
114	6.9	2	4.8	-9.6	6.928E-4	15.375	7900	0.17	3376.1
114	6.9	3	8.77	-11.9	1.270E-3	21.456	7750	0.18	3283.9
114	6.9	4	13.1	-14.45	1.848E-3	28.548	7600	0.21	3161.2
104	6.9	1	0.75	-7.3	0.000E+0	10.336	7690	0.00	3845



104	6.9	2	4.5	-9.5	5.774E-4	15.036	8290	0.15	3604.3
104	6.9	3	8.8	-12	1.270E-3	21.595	8060	0.19	3386.6
104	6.9	4	13.1	-14.5	1.848E-3	28.598	7520	0.23	3056.9
116	10.3	1	0.91	-10.8	0.000E+0	15.261	9550	0.14	4207
116	10.3	2	6	-13.7	9.238E-4	21.351	8630	0.17	3688
116	10.3	3	11.8	-17.1	1.732E-3	30.08	8170	0.20	3415.6
116	10.3	4	17.5	-20.4	3.002E-3	39.251	7190	0.25	2876
105	10.3	1	0.8	-10.8	0.00E+0	15.246	7300	0.16	3146.6
105	10.3	2	6	-13.7	8.083E-4	21.351	8970	0.13	3986.7
105	10.3	3	11.9	-17.2	1.617E-3	30.284	8440	0.18	3591.5
105	10.3	4	17.3	-20.3	2.540E-3	38.939	7700	0.22	3155.7

# **Annexe C**

Analyse de stabilité du modèle élastique non-linéaire



La condition de stabilité du modèle élastique non-linéaire est que la dérivée seconde par rapport à la contrainte élastique équivalente du potentiel  $W_c$  soit positive, nous allons en conséquence étudier le signe de cette dérivée seconde du potentiel  $W_c$  dont l'expression s'écrit sous la forme

$$W_c(\sigma_e, g^p) = \int_0^{\sigma_e} \frac{\sigma_e}{E_s(\sigma_e, g^p)} d\sigma_e$$

avec

$$E_s(\sigma_e, g^p) = 2(1+\nu(g^p))G_s(\sigma_e, g^p) = 2(1+\nu(g^p))\eta(g^p) \left( G_{s_0} + \frac{(a-b\sigma_e)\sigma_e}{1+c\sigma_e} \right)$$

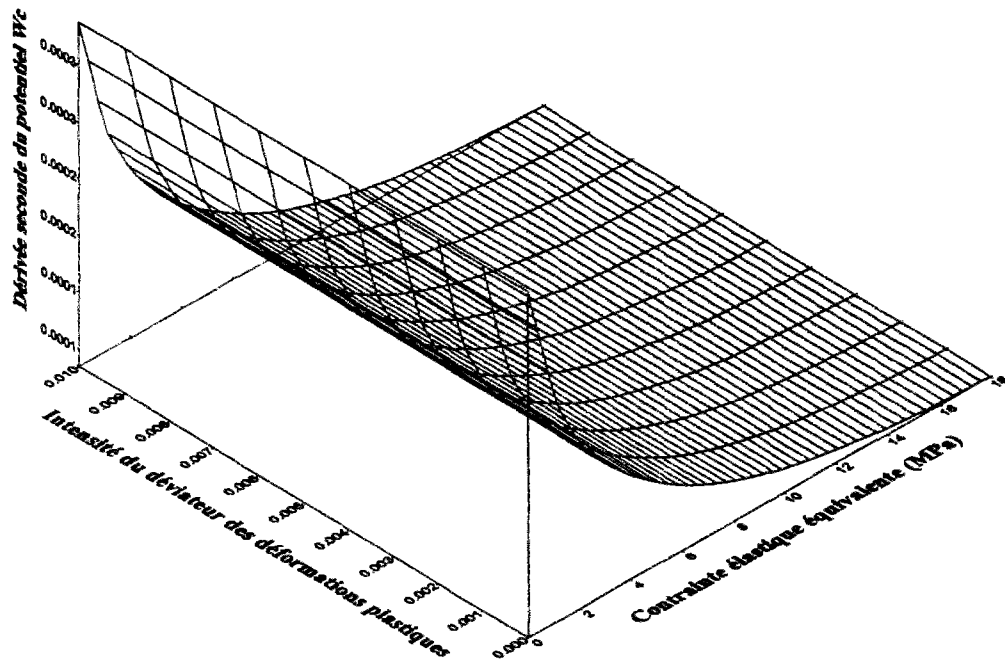
où les fonctions  $\nu(g^p)$  et  $\eta(g^p)$  sont respectivement données par les relations 3.3.1 et 3.3.3.

La dérivée seconde de  $W_c$  est de la forme suivante

$$\frac{d^2}{d\sigma_e^2} W_c(\sigma_e, g^p) = \frac{G_{s_0} + 2cG_{s_0}\sigma_e + (b+c^2G_{s_0}+ca)\sigma_e^2}{2(1+\nu(g^p))\eta(g^p)(-G_{s_0}-cG_{s_0}\sigma_e+b\sigma_e^2)^2}$$

les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $G_{s_0}$  sont donnés par la relation 3.3.4 et sont tous positifs. On en déduit, comme on le remarque à partir de l'expression ci-dessus, que la dérivée seconde du potentiel  $W_c$  est positive quelque soient  $\sigma_e$  et  $g^p$  ( $\sigma_e$  et  $g^p$  sont des grandeurs positives).

La surface représentant l'évolution de la dérivée seconde du potentiel  $W_c$ , par rapport à la contrainte élastique équivalente  $\sigma_e$  et à l'intensité du déviateur des déformations plastiques  $g^p$ , montre que le modèle élastique non-linéaire est stable.



Représentation de l'évolution de la dérivée seconde du potentiel  $W_c$  par rapport à la contrainte élastique équivalente  $\sigma_e$  et à l'intensité du déviateur des déformations plastiques

$g^p$

# **Annexe D**

Couplage entre élasticité non-linéaire, endommagement isotrope et théorie de l'écoulement plastique avec critère de plasticité et potentiel plastique non-linéaires.



Nous allons commencer par déterminer la loi de comportement incrémentale concernant le couplage entre l'élasticité non-linéaire et l'endommagement isotrope. Le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit sous la forme

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3 = s_{ij} + p \delta_{ij} = 2G_s \left[ \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right]$$

l'incrément du tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit donc

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left[ \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right] + \frac{\dot{G}_s}{G_s} \sigma_{ij} + \frac{3p}{(1+\nu)(1-2\nu)} \dot{\nu} \delta_{ij}$$

avec

$$\dot{\nu} = \frac{\partial \nu}{\partial g^p} \dot{g}^p \quad \text{et} \quad \dot{G}_s = \frac{\partial G_s}{\partial \sigma_e} \dot{\sigma}_e + \frac{\partial G_s}{\partial g^p} \dot{g}^p$$

Le calcul de l'incrément de la contrainte élastique équivalente nous donne la relation suivante

$$\dot{\sigma}_e = 2(1+\nu) \frac{G_s}{\sigma_e} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^e + \dot{\sigma}_e \frac{G_s}{G_s} + \frac{1}{\sigma_e} \left[ T^2 + 3p^2 \left( \frac{2-\nu}{1+\nu} \right) \right] \dot{\nu}$$

On en déduit l'incrément du module élastique de cisaillement qui s'écrit sous la forme

$$\dot{G}_s = 2(1+\nu) \frac{\xi}{1-\xi} \frac{G_s^2}{\sigma_e^2} \dot{\sigma}_{kl} \varepsilon_{kl}^e + \Gamma G_s \dot{g}^p$$

où



$$\xi = \frac{\sigma_e}{G_s} \frac{\partial G_s}{\partial \sigma_e} \quad \text{et} \quad \Gamma = \frac{1}{1-\xi} \left[ \frac{\xi}{\sigma_e^2} (T^2 + 3p^2 \frac{2-\nu}{1+\nu}) \frac{\partial \nu}{\partial g^p} + \frac{1}{G_s} \frac{\partial G_s}{\partial g^p} \right]$$

La loi de comportement incrémentale représentant le couplage entre l'élasticité non-linéaire et l'endommagement isotrope s'écrit donc sous la forme

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} + E_{ij} \dot{g}^p$$

où

$$C_{ijkl}^e = G_s \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(1+\nu) \frac{\xi}{1-\xi} \frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{\sigma_e^2} \right)$$

$$E_{ij} = \Gamma \sigma_{ij} + \frac{3p}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \nu}{\partial g^p} \delta_{ij}$$

Le comportement plastique du matériau est étudié dans le cadre de la théorie de l'écoulement plastique non-associative, la loi d'écoulement plastique coaxiale et la condition de consistance s'écrivent sous la forme

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\Psi} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad ; \quad \dot{\Psi} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0$$

La condition de consistance de Prager conduit à une équation algébrique pour le multiplicateur plastique, de la forme suivante

$$\dot{\Psi} = \frac{\langle \dot{\Phi} \rangle}{H} B_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e$$

où

$$H = H_0 + H_t + H_d \quad ; \quad H_0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{klmn}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \quad ; \quad H_t = \frac{\partial F}{\partial \Psi} \quad ; \quad H_d = - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} E_{ij} Q_g$$

$Q_g$  étant donné par la relation 2.3.5.

La loi de comportement incrémentale concernant le couplage entre l'élasticité non-linéaire, l'endommagement isotrope et la théorie de l'écoulement plastique s'écrit donc sous la forme suivante

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left[ \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\langle 1 \rangle}{H} B_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} \right] + E_{ij} Q_g \frac{\langle 1 \rangle}{H} B_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

ou encore

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{epd} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

où

$$C_{ijkl}^{epd} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p + C_{ijkl}^d$$

le tenseur de rigidité plastique  $C_{ijkl}^p$  et le tenseur d'endommagement isotrope  $C_{ijkl}^d$  sont donnés par les relations suivantes

$$C_{ijkl}^p = \frac{\langle 1 \rangle}{H} C_{mnij}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}^e$$

$$C_{ijkl}^d = \frac{\langle 1 \rangle}{H} E_{ij} Q_g B_{kl}$$